Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

* * * * *

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 514–1 (Michel Lafond)

Un hexagone ayant un centre de symétrie est inscrit dans un cercle. On mesure en centimètres les distances d'un point M du plan à cinq sommets de l'hexagone. Ces distances, arrondies à l'entier le plus proche sont, par valeurs croissantes :

21, 53, 69, 97 et 118.

Calculer à 1 cm près la distance de M au sixième sommet.

Problème 514–1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x-1)$ et que f est bornée. Montrer que f est nulle. Étudier cet énoncé en prenant ensuite une fonction dérivable $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ ou I n'est pas l'intervalle $\mathbb{R}$ tout entier.

Problème 514–3 (Jean-Pierre Friedelmeyer)

Un cercle (0) osculateur en un point A d'une parabole $(\mathcal{P})$ d'axe (d) recoupe celle-ci en un unique point B. Démontrer que les angles que font (OA) et (OB) avec l'axe (d) vérifient

$$(d,\mathrm{OB}) \equiv -3(d,\mathrm{OA}) \mod \pi.$$

Un cercle (0) coupe une parabole $(\mathcal{P})$ d'axe (d) en quatre points A, B, C, D. Démontrer que

$$\left(\vec{d},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\left(\vec{d},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\left(\vec{d},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+\left(\vec{d},\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) \equiv 0 \mod \pi,$$

la droite (d) étant orientée arbitrairement.

Solutions des problèmes antérieurs

Commentaire de Jean-Philippe Cortier sur le probleme 503-3

J'ai reçu une jolie solution à ce problème. Il s'agissait de montrer que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre premier $p \geq 3$, et un sous groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, l'application

$$\begin{cases} G \to GL_n(F_p) \\ A \mapsto A \bmod p \end{cases}$$

est injective. L'argument naturel de **Jean-Philippe Cortier** (Troyes) est le suivant.

Soit $A \in G$. D'apres Lagrange, si m est le cardinal de G, alors $A^m = I_n$. La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont des racines de l'unité, donc de module 1. Supposons de plus que $A \equiv I_n \bmod p$. Ainsi, $B = \frac{1}{p}(A - I_n)$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et son spectre est

$$\left\{ \frac{\lambda - 1}{p} \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A) \right\}.$$

En particulier, une valeurs propre de B vérifie

$$|\mu| \leq \frac{2}{p} < 1,$$

puisque $p \geq 3$. Donc la suite $(B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle. Étant formée de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$, cette suite est stationnaire. Finalement, B est nilpotente et diagonalisable, donc nulle. Ainsi,

$$A = I_n + pB = I_n;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Problème 504-1 (Moubinool Omarjee, Lycée Henri IV , Paris)

On note $\lfloor \ \rfloor$ la fonction partie entière et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n est le n-ième nombre premier. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}}{p_n}.$$

Réponses de Moubinool Omarjee (Paris) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

Les deux réponses utilisent des résultats sur la répartition des nombres premiers et une transfomation d'Abel.

La solution que propose **Moubinool Omarjee** suppose connu un résultat très fin de théorie analytique des nombres, dû à **Jean-Louis Nicolas**(1)

$$p_{n+1} - p_n \leq p_n^{5/8}.$$

Pierre Renfer utilise lui un développement asymptotique de p_n :

$$p_n \underset{n \to +\infty}{=} n \ln(n) + \mathcal{O}(n \ln(\ln(n))).$$

Ainsi,

(1) Jean-Louis Nicolas, Répartition des nombres premiers, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres, tome 9, numéro 2 (1967-1968).

$$\frac{1}{p_n}-\frac{1}{n\ln(n)}=\frac{n\ln(n)-p_n}{n\ln(n)\,p}\underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n\ln^2(n)}\right)$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{1}{p_n}-\frac{1}{n\ln(n)}\right|\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n\ln^{3/2}(n)}\right).$$

En utilisant les séries de Bertrand, on voit que les séries $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}}{p_n}w$ et $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}}{n\ln(n)}$ sont de même nature.

On va maintenant montrer que cette seconde série converge, en effectuant une transformation d'Abel. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}}{n\ln(n)}\quad (N\geq 2)$$

et

$$\sigma_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}\quad (N\geq 1)$$

Ainsi,

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}(\sigma_n-\sigma_{n-1})\frac{1}{n\ln(n)}.$$

On coupe les sommes en deux et l'on fait un décalage d'indices :

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{\sigma_n}{n\ln(n)}-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\sigma_n}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

On isole un terme dans chaque somme et l'on regroupe la partie commune :

$$S_N=\frac{\sigma_N}{N\ln(N)}+\sum_{n=2}^{N}\sigma_n\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)-\frac{\sigma_1}{2\ln(2)}.$$

Donc

$$S_N=\frac{\sigma_N}{N\ln(N)}+\sum_{n=2}^{N}\frac{\sigma_n\left((n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)\right)}{n(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}-\frac{\sigma_1}{2\ln(2)}.$$

Admettons provisoirement que $\sigma_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(\ln(n))$. Alors le terme général dans la somme ci-dessus est un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc (S_N) converge, ce qui permet de conclure.

Il reste à prouver la domination $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\ln(n))$. Pour cela, on introduit les notations suivantes. Pour deux réels $x > 1$ et $\varphi > 0$, posons

$$\sigma(\varphi,x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{x}{\varphi} \right\rfloor} (-1)^{\lfloor n\varphi \rfloor} = \frac{1}{4} + \sum_{0<n\varphi\le x} (-1)^{\lfloor n\varphi \rfloor}.$$

Le théorème de Beatty stipule que pour deux réels α, $\beta > 1$ les ensembles $\left\{\lfloor n\alpha \rfloor \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $\left\{\lfloor n\beta \rfloor \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si α et β sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. On choisit par la suite $\alpha = \sqrt{2}$ et

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} = 2 + \sqrt{2}.$$

Pour $x \geq 1$, les entiers $\lfloor n\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\beta \rfloor$ qui appartiennent a]0, x] forment une partitition de tout l'ensemble $[[1, m]]$ où l'entier m vaut $\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor - 1$. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ et $x \geq 1$,

$$\sigma(\alpha,x) + \sigma(\beta,x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k = \pm\frac{1}{2},$$

selon la parité de m. Donc

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},x\right)\right| \le \left|\sigma\left(2+\sqrt{2},x\right)\right| + \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Par ailleurs, l'encadrement $0 < n\left(2+\sqrt{2}\right) \le x$ équivaut à $0 < n\sqrt{2} \le \left(\sqrt{2}-1\right)x$.: Donc

$$\sigma\left(2+\sqrt{2},x\right) = \frac{1}{4} + \sum_{0<n\left(2+\sqrt{2}\right)\le x} (-1)^{\left\lfloor n\left(2+\sqrt{2}\right)\right\rfloor} = \frac{1}{4} + \sum_{0<n\sqrt{2}\le\left(\sqrt{2}-1\right)x} (-1)^{\left\lfloor n\sqrt{2}\right\rfloor},$$

c'est-à-dire que

$$\sigma\left(2+\sqrt{2},x\right) = \sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)x\right). \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},x\right)\right| \le \left|\sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)x\right)\right| + \frac{1}{2}.$$

Par itération, on obtient pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},x\right)\right| \le \left|\sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)^k x\right)\right| + \frac{k}{2}.$$

On choisit

$$k = 1 + \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\rfloor,$$

pour lequel

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^k x < \sqrt{2}$$

et

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)^k x\right)\right| = \frac{1}{4}$$

En revenant a la somme initiale σ_n,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor} = \sigma\left(\sqrt{2}, n\sqrt{2}\right) - \frac{1}{4},$$

donc

$$|\sigma_n| \leq \frac{1}{4} + \left|\sigma\left(\sqrt{2}, n\sqrt{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{k}{2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\ln(n)\right),$$

comme souhaité.

Problème 504–2 (Ghali Lalami (Marrakech))

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $3^n - 2$ soit un carré parfait.

Réponses de Maurice Bauval (Versailles) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

Les entiers $n = 1$ et $n = 3$ sont des solutions évidentes :

$$3^1 - 2 = 1^2 \text{ et } 3^3 - 2 = 5^2:$$

On va montrer que ce sont les seules. Soit n une solution. Tout d'abord, n est nécessairement impair, car si n était pair, disons $n = 2p$, alors il existerait $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$3^{2p} - 2 = a^2,$$

soit encore

$$\left(3^p + a\right)\left(3^p - a\right) = 2.$$

Comme $3^p + a$ est strictement positif, la seule possibilité serait

$$3^p + a = 2 \text{ et } 3^p - a = 1,$$

donc

$$2 \times 3^p = 3,$$

ce qui est impossible.

On cherche desormais les éventuelles solutions impaires autres que 1 et 3 sous la forme $n = 3 + 2p$ avec $p > 1$. On pose $b = 3^p$. Il existe donc $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$3^n - 2 = a^2,$$

ce que l'on écrit

$$27b^2 - a^2 = 2.$$

C'est une équation de type Pell-Fermat. Il s'agit de trouver parmi les solutions $(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ celles donc l'abscisse b est une puissance de 3 (autre que 1).

Les premières solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont

$$(b, a) = (1, 5) \; ; (51, 265) \; ; (2651, 13775).$$

Si Ω est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ de l'hyperbole d'équation $27x^2 - y^2 = 2$ à coordonnées dans $\Omega \times \Omega$. Ainsi, $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ est toute l'hyperbole tandis que $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des points à coordonnées entières relatives, etc. On va montrer que les points de $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ sont exactement les points

$$\mathrm{M}_0(1, 5) \text{ et } \mathrm{M}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{M}_0 \; (n \in \mathbb{N})$$

où A est la matrice inversible

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 135 & 26 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26x + 5y \\ 135x + 26y \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$27x'^2 - y'^2 = 27\,(26x + 5y)^2 - (135x + 26y)^2 = 27x^2 - y^2:$$

Ainsi,

$$(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \quad \text{si et seulement si} \quad (x', y') \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \tag{3}$$

De plus, comme la matrice A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, si (x, y) est dans $\mathbb{Z}^{2,}$ alors (x', y') est dans $\mathbb{Z}^2$. Et comme $\det(\mathrm{A}) = 1$, la matrice A^{-1} est aussi à coefficients dans Z. Donc

$$(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z}) \quad \text{si et seulement si} \quad (x', y') \in \mathcal{H}(\mathbb{Z}) \tag{4}$$

Les coefficients de A étant même dans $\mathbb{N}$, si $(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{N})$, alors (x', y') est dans $\mathcal{H}(\mathbb{N})$. Puisque M_0 est dans $\mathcal{H}(\mathbb{N})$, tous les points $\mathrm{M}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{M}_0$ sont dans $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, l'application $f : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ définit une bijection sur $\mathcal{H}(\mathbb{R})$, et envoie le point M_n sur le point M_{n+1}. Comme elle est continue, elle préserve la connexité. Elle envoie l'arc d'hyperbole $\overset{\frown}{\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}}$ sur un arc d'hyperbole contenant $\overset{\frown}{\mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_{n+2}}$. Or on munit $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ d'une relation d'ordre total de la façon suivante : $\mathrm{M}_1(x_1, y_1) \leq \mathrm{M}_2(x_2, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq x_2$ (auquel cas $y_1 \leq y_2$). Pour cette relation d'ordre, f est strictement croissante sur $\mathcal{H}(\mathbb{N})$. Donc f envoie exactement l'arc d'hyperbole $\overset{\frown}{M_n M_{n+1}}$ sur $\overset{\frown}{M_{n+1} M_{n+2}}$.

Soit $M \in \mathcal{H}(\mathbb{N})$. Puisque la suite des abscisses des points M_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, il existe un entier n tel que $M \in \overset{\frown}{M_{n+1} M_{n+2}}$. D'après ce qui précède,

$$A^{-n} M \in \overset{\frown}{M_0 M_1} \cap \mathcal{H}(\mathbb{N}) = \{M_0, M_1\}.$$

Donc le point M est soit le point M_n soit le point M_1, ce qui prouve, comme annoncé, que les points de $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ sont exactement les points

$$\begin{pmatrix} b_0 = 1 \\ a_0 = 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Or

$$A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2 = 52A - I_2,$$

donc

$$\begin{pmatrix} b_{n+2} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = (52\,A - I_2) \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = 52 \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Finalement, toutes les solutions $(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation

$$27b^2 - a^2 = 2$$

sont données par

$$\begin{pmatrix} b_0 = 1 \\ a_0 = 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 = 51 \\ a_1 = 265 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52b_{n+1} - b_n \\ 52a_{n+1} - a_n \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant les puissances de 3 (autre que 1) parmi les b_n. On remarque que

$$b_{n+2} = 52b_{n+1} - b_n \equiv b_n - b_{n-1} \bmod 51$$

et que $51 = 3 \times 17$. Voici les premières valeurs de la suite $(b_n \bmod 51)_{n\in\mathbb{N}}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$b_n \mod 51$	1	0	50	50	0	1	1	0

La suite $(b_n \bmod 51)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique de période 6. Il en est de même des suites $(b_n \bmod 3)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n \bmod 17)_{n\in\mathbb{N}}$. Or voici ces deux suites :

n	0	1	2	3	4	5
$b_n \mod 3$	1	0	2	2	0	1
$b_n \mod 17$	1	0	16	16	0	1

les motifs se répétant ensuite. On en déduit que l'entier b_n est divisible par 3 si et seulement si il est divisible par 17. Donc b_n n'est jamais une puissance de 3. Il s'ensuit qu'il n'existe aucune autre solution au problème initial.