

Le produit thalésien des scalaires en géométrie plane euclidienne

par C. FRASNAY

(Université Paul-Sabatier, Toulouse)

N.D.L.R. — Cet article évoque une axiomatique de la géométrie qui ne correspond pas aux nouveaux programmes du premier cycle. Néanmoins, il n'a pas paru inutile de rappeler dans notre Bulletin qu'il existe différentes approches de la géométrie plane euclidienne, et que l'énoncé de Thalès y apparaît chaque fois comme une articulation essentielle. En mesurant l'obstacle que représente la démonstration de cet énoncé quand on part de prémisses légères, on comprend mieux la force d'autres conceptions qui l'introduisent d'emblée à titre d'axiome.

Nos idées sur les fondements de la géométrie ont été profondément éclairées par le célèbre ouvrage de Hilbert : « Grundlagen der Geometrie » (1899). Depuis cette époque, d'autres approches de la géométrie plane euclidienne ont été proposées, des simplifications ont été apportées aux démonstrations initiales de Hilbert, et l'évolution de nos conceptions touchant la théorie des ensembles retentit encore sur la géométrie. De tous ces travaux, il se dégage quelques principes concernant, notamment, les types de corps ordonnés dont la géométrie plane euclidienne a le plus grand besoin pour se fonder rigoureusement. L'opération de multiplication (dans un tel corps de scalaires jaugeant un plan euclidien) peut alors se redéfinir au moyen de la construction de Thalès : d'où son nom de *produit thalésien*.

1. — Afin de justifier la « consistance » (non-contradiction relative) de la géométrie plane euclidienne au sein d'une mathématique basée sur telle ou telle théorie des ensembles (*), il est indispensable de démontrer au préalable l'existence d'un corps ordonné *quadratiquement clos* (corps ordonné dans lequel tout élément positif est un carré).

1) Dans les anciens programmes, le premier corps ordonné que rencontraient les élèves était le corps \mathbb{Q} des rationnels (issu de l'anneau ordonné \mathbb{Z}).

(*) On sait (Bulletin n° 280) que la théorie des ensembles peut être finitiste ou infinitiste, de conception ZF ou KM, etc.

Tous les corps ordonnés minimaux sont isomorphes à \mathbb{Q} , et ils s'avèrent notoirement insuffisants en géométrie plane euclidienne en vertu du théorème de Pythagore : ce théorème implique que, si x et y sont des scalaires de notre géométrie, alors $\sqrt{x^2 + y^2}$ doit être aussi un scalaire de cette géométrie. Or, pour $x = y = 1$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est connu depuis l'Antiquité.

La géométrie plane euclidienne exige donc, tout d'abord, un corps ordonné dans lequel toute somme de carrés soit encore un carré : on dit alors que ce corps est *pythagoricien*. On peut démontrer que tous les corps ordonnés pythagoriciens minimaux sont isomorphes et, si \mathbb{P} désigne l'un d'eux, on peut également justifier : $\sqrt{2} \notin \mathbb{P}$ (alors que $\sqrt{2} \in \mathbb{P}$). Tout corps ordonné quadratiquement clos est évidemment pythagoricien; par contre, le corps ordonné pythagoricien minimal \mathbb{P} n'est pas quadratiquement clos.

Étant donné un corps ordonné pythagoricien K , on peut prendre comme modèle d'un « plan » la classe K^2 des couples $M = (x, y)$ d'éléments de K , munie de la fonction « distance » d définie par la formule :

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Pour cette distance d dans K^2 , on peut vérifier quelques axiomes de nature géométrique qui constituent notre idée d'un plan, notamment : l'axiome d'incidence, l'axiome d'Euclide, l'axiome des pliages, l'axiome de Pasch (ces axiomes seront explicités plus loin)...

2) Toutefois, sous la seule hypothèse que la jauge scalaire K soit un corps ordonné pythagoricien, il n'est pas encore possible de montrer que le plan (K^2, d) vérifie l'axiome du compas : « Si une droite possède un point intérieur à un cercle, alors elle rencontre ce cercle. » En effet, pour $a \in K$, $a > 1$, introduisons la droite $D(a)$ d'équation $x = a - 1$ et le cercle $C(a)$ d'équation $x^2 + y^2 = (a + 1)^2$: $D(a)$ et $C(a)$ ne se rencontrent en un point $(a - 1, 2b)$ de K^2 que si $a = b^2$. Ainsi, l'axiome du compas exige que le corps ordonné K soit quadratiquement clos. Un contre-exemple est fourni par le corps ordonné pythagoricien minimal \mathbb{P} (non quadratiquement clos) : la droite $D(\sqrt{2})$ et le cercle $C(\sqrt{2})$ ne se rencontrent pas dans le plan \mathbb{P}^2 .

On peut démontrer que tous les corps ordonnés quadratiquement clos minimaux sont isomorphes. Si L désigne l'un d'eux, le plan euclidien L^2 est dénombrable, et tous les points de ce plan sont constructibles au moyen de la règle et du compas à partir des deux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$. On peut justifier $\sqrt[3]{2} \notin L$.

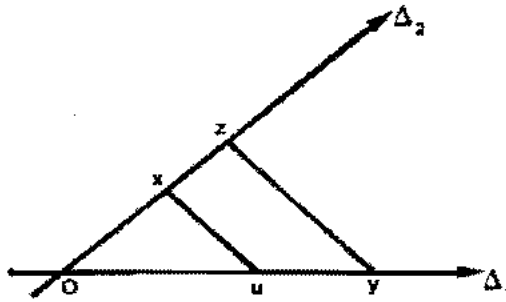
3) Avec les nouveaux programmes du premier cycle (basés sur une théorie des ensembles de type « ZF, infinitiste »), le corps \mathbb{R} des réels est le premier corps ordonné que rencontrent les élèves : \mathbb{R} est construit à partir de l'anneau ordonné \mathbb{D} des décimaux. C'est sous son seul aspect de *corps* (ordonné) que \mathbb{R} est invoqué en Quatrième, en vue d'introduire la notion de *plan affine*. En Troisième, pour introduire la notion de *plan métrique* (euclidien), on ajoute

uniquement le fait que le corps ordonné \mathbb{R} est quadratiquement clos. Tant qu'il ne s'agit que de rendre consistante la géométrie dite *élémentaire*, le seul intérêt de \mathbb{R} provient de l'opinion suivante (non dépourvue de subjectivité) : parmi les corps ordonnés quadratiquement clos, \mathbb{R} est le plus facile à construire — en mathématique infinitiste, du moins.

Au cours d'une conférence effectuée en mai 1971 (*), nous avons étudié quelques traits d'une autre mathématique fondée sur une théorie des ensembles de type « KM, finitiste ». Dans cette mathématique, il existe un corps ordonné quadratiquement clos (on construit aisément \mathbb{L} par récurrence à partir de \mathbb{Q}) mais, par contre, il n'existe pas de corps ordonné complet. Ainsi, avec \mathbb{L}^3 comme modèle, la géométrie plane euclidienne reste consistante en mathématique finitiste, bien que \mathbb{R} n'existe pas. Cette remarque montre clairement qu'il faudrait tempérer les affirmations, plus ou moins péremptoires, selon lesquelles le corps des réels serait « indispensable » à l'édification de la géométrie.

2. — Étant donné un plan euclidien E jaugeé par un ensemble G de scalaires, portons exclusivement notre attention sur la structure (α, θ) de groupe (additif) ordonné dont est naturellement muni G : α est l'opération d'addition (dans G) et θ est la relation d'ordre total (dans G).

Dans E , soit $r = (\Delta_1, \Delta_2)$ un repère (couple d'axes ayant même origine, de supports distincts). Pour $u \in G$, $u > 0$, $x \in G$, $y \in G$, définissons le scalaire $z = \mu(u)(r)(x, y)$ (produit thalésien de x et de y , dans le repère r , pour l'unité u) de la manière suivante : la droite joignant les points $(u, 0)$ et $(0, x)$ admet comme parallèle une droite passant par les points $(y, 0)$ et $(0, z)$.



A chaque couple (u, r) (formé d'un scalaire $u > 0$ et d'un repère r du plan) est ainsi associée une opération interne $\mu(u)(r)$ dans G , selon laquelle : $(x, y) \mapsto z$ (quand x, y parcourent G). On dit que $\mu(u)(r)$ est la *multiplication thalésienne* d'unité u , relative au repère r .

(*) « Finitude, finitisation, finitisme » (Journées nationales de l'A.P.M.E.P., Toulouse).

Dès lors, voici le théorème fondamental qui doit se substituer à l'énoncé de Thalès : « Soit E un plan euclidien de jauge G , et soit u un élément strictement positif de G .

1) Toutes les multiplications thalésiennes $\mu(u)(r)$ (dans G) sont identiques : elles ne dépendent pas du repère r et (par l'abus d'écriture habituel) on peut désigner par $\mu(u)$ la valeur constante de la fonction $r \mapsto \mu(u)(r)$.

2) La structure $(\alpha, \mu(u), \theta)$ de support G (d'addition α , de multiplication $\mu(u)$, d'ordre θ) est une structure de corps ordonné quadratiquement clos, d'unité u . »

Si, dès le départ de l'axiomatique, la jauge scalaire G est munie d'une structure $(\alpha, \lambda, \theta)$ de corps ordonné quadratiquement clos d'unité u , et si — pour la multiplication λ — l'énoncé de Thalès est pris comme axiome (c'est la situation du nouveau programme de Quatrième, avec $G = \mathbb{R}$, $u = 1$), alors la démonstration du théorème sur la multiplication thalésienne se réduit à fort peu de choses. L'énoncé de Thalès donne : $\mu(u)(r) = \lambda$ quel que soit le repère r de E . Pour une autre unité v , posons (pour abrégé) :

$$\mu(u)(r)(x, y) = x \top y, \quad \mu(v)(r)(x, y) = x \perp y, \quad \text{et } u = v \top w$$

(w est donc l'inverse de v au sens de la multiplication initiale λ). On démontre alors la formule :

$$x \perp y = w \top (x \top y).$$

Ainsi, pour chaque unité v (fixée dans G), la fonction $r \mapsto \mu(v)(r)$ est bien une constante.

Mais, dans cet article, nous allons nous intéresser à une axiomatique aux prémisses plus légères, et le théorème sur la multiplication thalésienne n'y sera pas « escamoté » (si l'on nous permet ce mot) par un axiome fort. Au départ, on suppose que la jauge scalaire G est seulement munie d'une structure (α, θ) de groupe (additif) totalement ordonné, non réduit à $\{0\}$. Cette structure est suffisante dans la première partie du développement de la géométrie plane euclidienne, partie qu'on peut appeler la géométrie *additive*, comprenant notamment les rubriques suivantes : isométries (symétries, translations, rotations), parallélogrammes, repères et projections, orthogonalité (et théorème de l'orthocentre), théorie des angles, condition angulaire de cocyclicité de 4 points. C'est à propos du théorème de Thalès qu'on aborde pour la première fois la géométrie *multiplicative*, et il faut remarquer que ce théorème est précédé par un lemme qui appartient à la géométrie additive : « Dans le plan euclidien E , soit f une projection sur une droite D (parallèlement à une direction Δ). Si M est le milieu de 2 points A et B de E , alors $f(M)$ est le milieu des points $f(A)$ et $f(B)$ » (lemme de Thalès).

Ayant choisi dans G un élément $u > 0$, destiné à servir d'unité, on considère tout d'abord les multiplications thalésiennes $\mu(u)(r)$ associées aux repères *orthogonaux* $r = (\Delta_1, \Delta_2)$ de E . Ces opérations sont identiques, en raison de l'isométrie permettant de passer d'un repère orthogonal à un autre repère

orthogonal. Pour abrégé, nous noterons dans ce qui va suivre : $ax = \mu(u)(r)(a, x)$, produit thalésien relatif à un repère orthogonal r .

Dans la définition du produit thalésien ax , il est clair que a et x jouent des rôles différents : déjà se pose la question de la commutativité ($ax = xa$?).

De la définition découle aussitôt l'équation d'une droite : d'abord d'une droite passant par l'origine et le point (u, a) (équation $y = ax$), puis par translation celle d'une droite passant par les points $(0, b)$ et $(u, a + b)$ (équation $y = ax + b$) (*).

Il reste à étudier les propriétés de cette multiplication thalésienne.

1) u joue bien le rôle d'élément neutre à droite ($au = a$) et à gauche ($ua = a$).

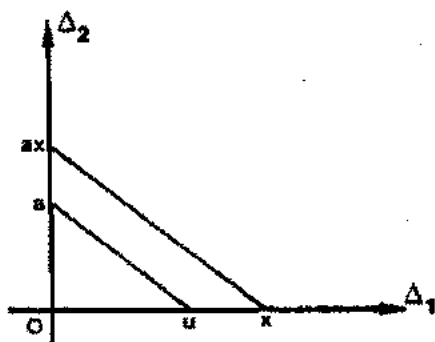
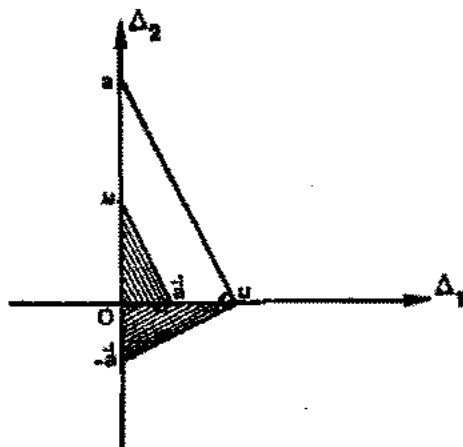
2) Tout scalaire $a \neq 0$ est régulier :

— à gauche : $ax = ay \Rightarrow x = y$,

— à droite : $xa = ya \Rightarrow x = y$.

Corollairement : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (faire les figures correspondantes).

3) Le produit de deux scalaires positifs est positif. La règle des signes $(-a)x = a(-x) = -(ax)$ résulte de petites symétries.



4) Tout scalaire $a \neq 0$ admet un inverse unique.

Étant donné deux droites D, D' d'équations respectives $y = ax + b, y = a'x + b'$, on obtient aisément les critères de *parallélisme* ($D \parallel D' \Leftrightarrow a = a'$) et d'*orthogonalité* ($D \perp D' \Leftrightarrow aa' = -u$).

(La figure ci-contre met en évidence le point $(a, 0)$. Une rotation de centre O , d'amplitude -90° , en déduit le point $(0, -a)$, d'où le critère d'orthogonalité.)

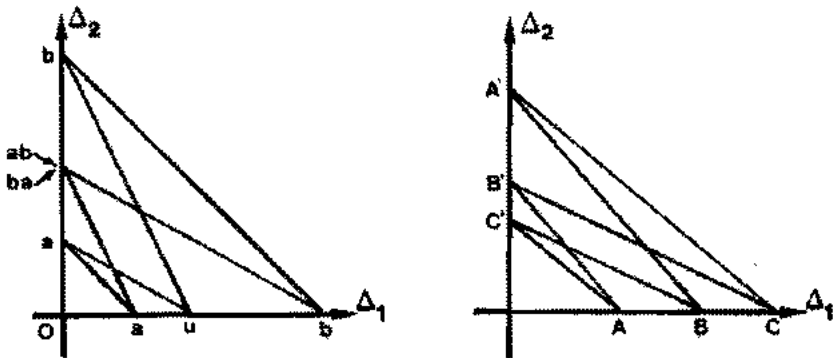
5) *Distributivité à droite* : on

(*) Nous reprenons ici le thème d'une conférence faite en mars 1969 devant les membres de la régionale toulousaine de l'A.P.M.E.P. Cette conférence avait suscité un document, rédigé par M. PRAVSSR et diffusé dans les *Annales du C.R.D.P.* de Toulouse (mai 1969).

commence par établir $a(d + a) = ad + ad$ en utilisant le lemme de Thalès, et on en déduit plus généralement $a(x + y) = ax + ay$ en notant d la moyenne de x et de y .

6) Mais la *commutativité* ne s'obtient pas si facilement. Voyons à quelle figure géométrique correspond la propriété $ab = ba$ (ci-dessous). C'est un cas particulier de la figure suivante (avec A, B, C sur Δ_1 et A', B', C' sur Δ_2 , ces points étant distincts de l'origine) :

« Si $AB' \parallel A'B$ et si $BC' \parallel B'C$, alors $AC' \parallel A'C$ ». C'est un exercice intéressant de géométrie élémentaire (multiplicative) que de démontrer cette propriété, dite « de Pappus-Pascal. » En 1909, Hilbert l'a démontrée en géométrie additive en utilisant la théorie des angles et le lemme angulaire de cocyclicité de 4 points (propriété des quadrangles inscrits).



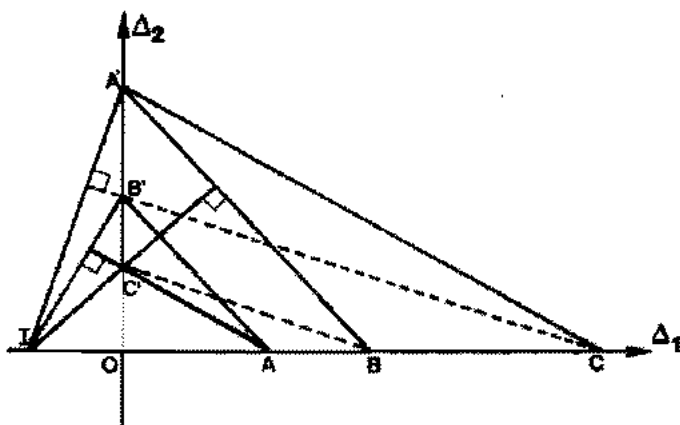
La même année 1909, un autre mathématicien allemand, Schur, publie un ouvrage (de même titre « Grundlagen der Geometrie ») où il donne une nouvelle démonstration du lemme de Pappus-Pascal avec des moyens beaucoup plus économiques, puisqu'il utilise seulement le théorème de l'orthocentre (compte tenu de l'axiome des parallèles, on sait que la concurrence des hauteurs résulte de la concurrence des médiatrices). En 1911, Halsted cite déjà la démonstration de Schur dans un livre d'enseignement intitulé « Géométrie rationnelle ».

On remarquera que le lemme de Pappus-Pascal permet également d'obtenir l'*associativité* de la multiplication thalésienne. Nous chercherons à obtenir la formule $(ca)b = (cb)a$ qui fournit simultanément la commutativité (par $c = u$) et l'associativité.

Voici tout d'abord la démonstration de Schur qui est à la portée d'un bon élève de Troisième.

Les hypothèses sont : $AB' \parallel A'B$ et $BC' \parallel B'C$. On introduit alors le point I de Δ_1 tel que $B'I \perp C'A$.

Le point C' est donc orthocentre de $AB'I$, donc $C'I \perp AB'$. Puisque $C'I \perp A'B$, C' est encore orthocentre de $BA'I$, donc $A'I \perp BC'$.



Puisque $A'I \perp B'C'$, B' est orthocentre de $CA'I$, donc $B'I \perp A'C'$ et finalement : $AC' \parallel A'C$.

(Les cas particuliers où I se confond avec l'un des points A, B, C sont encore plus faciles à étudier.)

Pour en déduire la formule mixte de commutativité-associativité $(ca)b = (cb)a$, il suffit, dans la figure de Pappus-Pascal, de prendre respectivement a, b, u comme abscisses des points A, B, C , et $cb, ca, (ca)b, c$ comme ordonnées respectives des points A', B', C' et J (point auxiliaire sur Δ_2). Par définition de la multiplication thalésienne, J est tel que CJ est parallèle à $A'B$ et à $B'A$: il en résulte bien $(ca)b = (cb)a$ comme ordonnée du point C (*).

7) La *distributivité à gauche* résulte de la commutativité et de la distributivité à droite.

En résumé, étant parti du groupe additif totalement ordonné G , on a pu (grâce à une définition inspirée du théorème de Thalès) doter G d'une structure de *corps ordonné*.

3. — Il restait, pour relancer l'intérêt des études de géométrie élémentaire, à simplifier l'axiomatique de Hilbert. Cette tâche a été exécutée par G. Choquet en 1955 dans un article intitulé « Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire », chapitre V, d'un ouvrage collectif : « L'enseignement des Mathématiques » (publié par les Éditions Delachaux et Niestlé).

Cette axiomatique de la géométrie plane a été développée dans des articles successifs :

1955 : article initial de G. Choquet, déjà cité,

1959 : C. Frasnay (dans la revue *Alger-Mathématiques*),

1960 : G. Choquet (*Bulletins* n° 209-213 de l'A.P.M.),

(*) En prenant u, y, v comme abscisses respectives de A, B, C , et x comme ordonnée de B' , le lemme de Pappus-Pascal donne aussi la formule $ux \uparrow y = v \uparrow (x \downarrow y)$ de changement d'unité dans la multiplication thalésienne (u, v étant unités respectives de T, I).

- 1962 : C. Frasnay (*Bulletin* n° 223 de l'A.P.M.),
 1967 : C. Frasnay (*Bulletin* n° 258 de l'A.P.M.),
 1968 : J. Couget (Note aux C.R. Acad. Sc., 1^{er} avril).

On se donne une *jauge* G , c'est-à-dire un groupe additif totalement ordonné. Ce groupe G n'est pas nécessairement \mathbb{R} (même si, par la suite, on souhaite n'utiliser pratiquement que le seul cas $G = \mathbb{R}$). Pour l'enseignement élémentaire, cette *jauge* G reste indéterminée au départ.

On considère ensuite un *espace G-métrique* E dans lequel les *distances* $d(M, N)$ appartiennent à G (le plan usuel sera donc un espace \mathbb{R} -métrique).

L'application d de E^2 dans G vérifie les propriétés habituelles des distances :

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \quad d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

(noter que la dernière condition implique nécessairement $d(A, B) \geq 0$, en faisant $C = A$).

On remarque que la *jauge* G est elle-même un espace G -métrique : il suffit de prendre la distance $d(x, y) = |x - y|$ (où $|a|$ désigne le plus grand des scalaires a et $-a$ dans G).

Entre deux espaces G -métriques E_1 et E_2 , une *isométrie* est une application σ de E_1 sur E_2 qui conserve les distances (il en résulte immédiatement que σ est injective, puisque $\sigma(M) = \sigma(N)$ entraîne successivement $d_{E_2}(\sigma(M), \sigma(N)) = 0$, $d_{E_1}(M, N) = 0$ et $M = N$). Par isométrie avec G , G^+ et les intervalles $[0, I]$ de G , on en déduit la définition des *G-droites*, des *demi-droites* et des *segments de droite*.

Cela posé, voici un énoncé possible des axiomes de la géométrie plane.

Axiome 1 : Par deux points distincts de E , il passe une droite et une seule.

Axiome 2 : Pour toute droite D de E , il existe une isométrie involutive σ de E telle que $\sigma(M) = M$ pour tout $M \in D$.

(Une isométrie *involutive* σ est assujettie à $\sigma \neq I_E$ et $\sigma \circ \sigma = I_E$, où I_E désigne la transformation identique de E et $\sigma \circ \sigma$ la composée $M \mapsto \sigma(\sigma(M))$).

Puisque les axiomes 1 et 2 sont vérifiés dans tout espace de dimension $n \geq 2$, il nous faut maintenant un axiome « planificateur » qui assure $n = 2$. Ce sera l'axiome de Pasch.

Axiome 3 : Si aucun des points A, B, C n'est situé sur une droite D , le nombre des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ qui rencontrent D est pair (c'est-à-dire 0 ou 2).

Axiome 4 (axiome d'Euclide) : Si un point A n'est pas situé sur une droite D , il existe *au plus* une droite D' de E passant par A et ne rencontrant pas D .

Axiome 5 (axiome du compas) : Si une droite D possède un point intérieur à un cercle C , alors D et C se rencontrent.

A partir de ces axiomes, on développe d'abord toute la géométrie additive. On introduit ensuite une multiplication thalésienne dont, nous l'avons vu, la seule propriété délicate à démontrer est la commutativité-associativité : $(ca)b = (cb)a$.

En 1959, nous avons justifié cette propriété d'une toute autre manière que Schur en utilisant un théorème de géométrie additive, celui des « perpendiculaires isotomiques » :

Deux droites D, D' sont *isotomiques* pour un segment $[A, B]$ d'une droite Δ lorsque : ou bien D, D' sont parallèles à Δ ; ou bien D, D' coupent Δ en deux points M et M' tels que $[A, B]$, et $[M, M']$ aient même milieu. Le théorème des droites isotomiques s'énonce alors : « Si deux droites D et D' sont isotomiques pour deux côtés d'un triangle, elles le sont aussi pour le troisième côté. » Les cas particuliers $D \parallel D'$ et $D \perp D'$ relèvent de la géométrie additive (par le lemme de Thalès pour $D \parallel D'$, et par la théorie des droites de Simson pour $D \perp D'$).

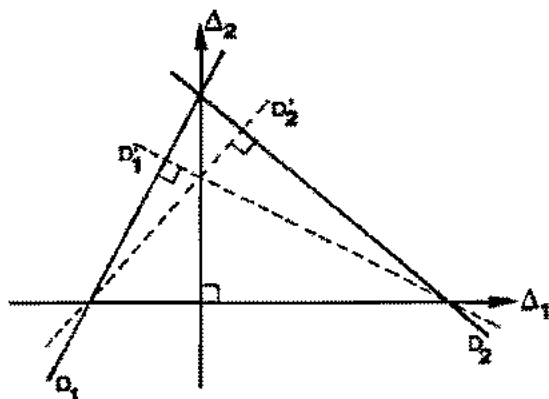
Un peu plus tard, en 1962, nous obtenions une autre méthode en démontrant que le théorème de l'orthocentre n'est que la traduction géométrique de la règle algébrique des proportions (dite encore « règle des moyens et des extrêmes »), apportant ainsi une simplification — est-elle ultime? — dans la démonstration de la commutativité-associativité de la multiplication thalésienne. Voici la méthode en question :

Soit a, b, c, d quatre scalaires non nuls de G vérifiant $ab = cd$. Dans un repère (Δ_1, Δ_2) du plan, le triangle formé par la droite $\Delta_1 (y = 0)$, la droite D_1 d'équation $y = -a(x - b)$ et la droite D_2 d'équation $y = -c(x - d)$, admet comme hauteurs la droite $\Delta_2 (x = 0)$, la droite D'_1 d'équation $y = a(x - d)$ et la droite D'_2 d'équation $y = c(x - b)$.

Puisque D'_1 et D'_2 se rencontrent sur Δ_2 il en résulte : $a^{-1}d = c^{-1}b$.

(Penser à la règle usuelle :

$$ab = cd \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{b}{c}.)$$



A partir de la règle des proportions, on achève par une méthode purement algébrique :

a) *Commutativité* :

Puisque $x \overset{-1}{x} = y \overset{-1}{y} = u$, on en déduit :

$$xy = yx.$$

b) *Associativité restreinte* :

De $u(xy) = xy$, on déduit :

$$y \overset{-1}{y} = u \overset{-1}{y} = x \overset{-1}{xy}.$$

c) *Associativité générale* :

De $x \overset{-1}{(xy)} = z \overset{-1}{(zy)} = y$, on déduit :

$$x(zy) = z(xy)$$

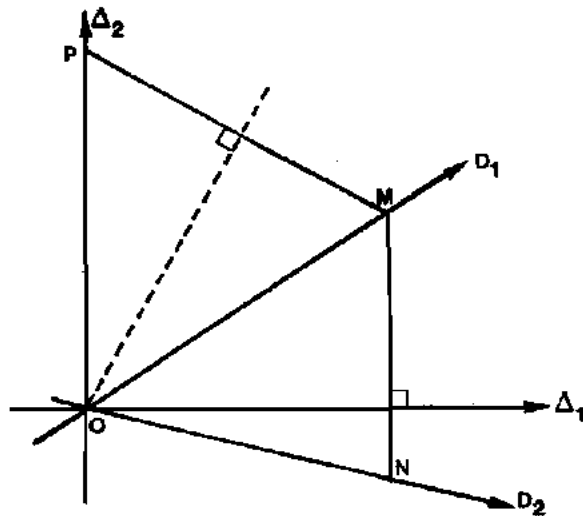
et (par commutativité)

$$x(yz) = (xy)z.$$

L'ensemble $G^* = G - \{0\}$ est donc bien un groupe commutatif pour la multiplication thalésienne (d'unité u).

Avec cette méthode utilisant des moyens simples : orthocentre, règle des proportions..., la multiplication thalésienne de Hilbert devient accessible à l'enseignement élémentaire. A côté du corps ordonné \mathbb{Q} des rationnels, dont la connaissance nous vient de l'Arithmétique, la géométrie fait donc apparaître les corps ordonnés pythagoriciens et (moyennant l'axiome du compas) les corps ordonnés quadratiquement clos.

4. — Pour terminer, examinons la démonstration du théorème de Thalès (d'après l'article « Deux structures équivalentes pour la géométrie plane », n° 223 du *Bulletin* de l'A.P.M.).



Dans le repère (Δ_1, Δ_2) , soit D_1, D_2 deux droites d'équations respectives $y = a_1x, y = a_2x$.

Une parallèle (*variable*) à Δ_2 coupe D_1 en M et D_2 en N : il s'agit de montrer que le rapport $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$ est alors constant.

(D_1, D_2 étant arbitrairement orientées.)

Sur Δ_2 , soit P le point d'ordonnée $\overline{OP} = \overline{OM}$.

Quand M parcourt la droite D_1 , la droite variable MP garde une direction fixe (perpendiculaire à la bissectrice de l'axe Δ_2 et de l'axe porté par D_1) : il existe donc une constante b_1 pour laquelle la droite MP prend l'équation $y = b_1x + \overline{OP} = b_1x + \overline{OM}$. L'abscisse m de M vérifie donc :

$$\overline{OM} = a_1m - b_1m = (a_1 - b_1)m$$

en utilisant pour la première fois la distributivité à gauche de la multiplication thalésienne (démontrée *après* la commutativité). De même, il existe une constante b_2 pour laquelle l'abscisse $n = m$ de N vérifie :

$$\overline{ON} = (a_2 - b_2)n.$$

Donc :

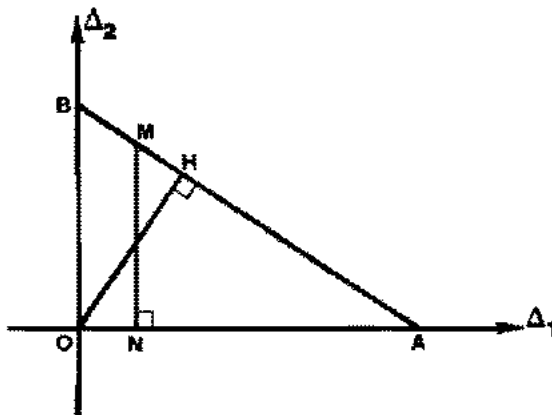
$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}.$$

Remarque :

Du théorème de Thalès résulte l'invariance (pour u fixé) de la multiplication thalésienne $\mu(u)(r)$, quel que soit le repère r . Puis le développement de la théorie redevient très classique.

a) Examinons par exemple le théorème de Pythagore. Sur Δ_1 , soit A le point d'abscisse $x \neq 0$.

Sur Δ_2 , soit B un point d'ordonnée $y \neq 0$. Sur le segment [A, B] (de longueur z), l'origine O se projette orthogonalement en H. La symétrie par rapport



à la bissectrice de l'angle \widehat{OAB} transforme O en M et H en N, de sorte que : $|x| = AM$, $AH = AN$. La droite MN étant parallèle à Δ_2 , le théorème de Thalès donne :

$$\frac{|x|}{AB} = \frac{AO}{AB} = \frac{AN}{AM} = \frac{AH}{|x|}$$

donc :

$$x^2 = AB \cdot AH.$$

De même :

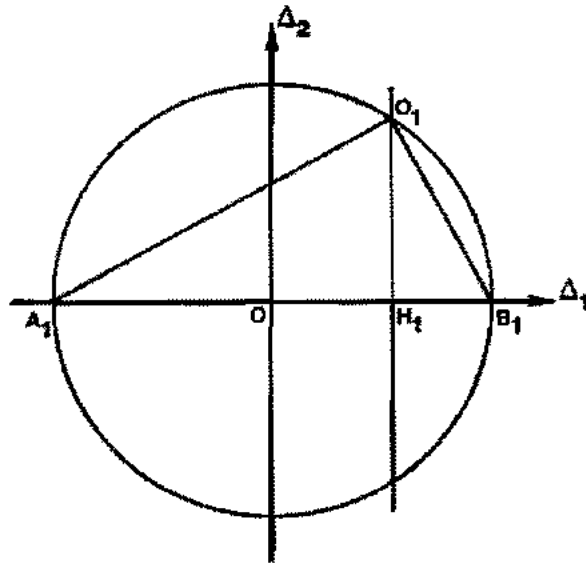
$$y^2 = AB \cdot BH$$

et

$$x^2 + y^2 = AB(AH + BH) = z^2.$$

Le corps des scalaires est donc bien pythagoricien.

b) Par ailleurs, si $0 < a < 1$, plaçons sur Δ_1 les points A_1 , B_1 , H_1 d'abscisses respectives, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $a - \frac{1}{2}$.



Si l'axiome du compas est imposé (axiome 5), la droite d'équation $x = a - \frac{1}{2}$ rencontre en O_1 le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$. La formule précédente $(O_1A_1)^2 = A_1B_1 \cdot A_1H_1$ fournit $O_1A_1 = \sqrt{a}$. Il en résulte que le corps des scalaires est quadratiquement clos.