Examens et concours

Le Baccalauréat ici et ailleurs

En prolongeant l'article de Pierre LEGRAND*

C. Jeanbrau

L'article de Pierre Legrand ne peut laisser indifférent le praticien. Voilà donc quelques "bonnes" informations sur ce qui se fait ailleurs ou, du moins, ce qui s'y teste. Mais peut-on énoncer sans résoudre ? La difficulté d'une discussion sur des questions effectivement posées à des élèves ou à des étudiants me semble être souvent là : *quid* des réponses ? Les leurs certes, prioritairement, mais aussi les nôtres.

La validation de ces réponses, leur certification, dépendent tant de l'œil qui les examine. Des hésitations sur la forme à leur donner, sur le niveau d'argumentation attendu, accepté, peuvent naître les vraies interrogations sur la pertinence justement des questions elles-mêmes. Et à notre niveau, pouvons-nous réellement discuter de l'intérêt, des forces, des faiblesses d'une question sans en avoir entièrement écrit une solution ?

J'ai donc essayé de réfléchir un peu sur ce qui nous était signalé et de

* *Les mathématiques dans les baccalauréats généraux de quelques pays* - Bulletin APMEP n° 400.

répondre, espérant par là aider au débat toujours ouvert : qu'est-ce qu'une formation mathématique, qu'en attendons-nous, que vise-t-elle et comment l'évaluer ?

Si on prend comme base de travail les énoncés fournis, quels champs de connaissances et de pratiques explorent-ils ?

On y trouve je crois :

- des notions sur les suites arithmétiques (calcul du n-ème terme) ;
- quelques familiarités avec le volume d'un solide et l'aire de sa frontière (ici, cône droit à base circulaire) ;
- la notion de vitesse d'un phénomène modélisable par une fonction $y = f(t)$ et son interprétation par $f'(t)$;
- le calcul de la longueur d'un côté d'un triangle (en fonction de l'angle opposé et des longueurs des deux autres côtés) ;
- une bonne, voire excellente (Japon, exercice n°3) connaissance de la notion de racine d'une équation $f(x) = 0$;
- des notions sur les systèmes d'équations linéaires ;
- des notions sur les pourcentages ;
- la notion de dérivée d'ordre supérieur d'une fonction $y = f(x)$;
- des notions de probabilités "naïves" dans un contexte de dénombrement fini (cas favorables, cas possibles) ;
- les notions de parité, d'imparité et leur usage ($y = f(x)$) ;
- la primitivation d'une fraction rationnelle du type : $1/[(ax + b)(cx + d)]$;
- des notions sur les polynômes, la division euclidienne des polynômes, les zéros des polynômes…
- des repérages de points, de droites, de vecteurs, dans le plan affine euclidien ;
- la pratique de l'exploitation de la notion de bijection réciproque d'une bijection donnée sous la forme $y = f(x)$, continue, monotone.

Tout cela me paraît très loin d'être négligeable…

Mais y est-ce ou l'y ai-je arbitrairement vu ?

N'y a-t-il que cela ? Et à quel niveau se situe (ou devrait se situer, aux yeux de l'évaluateur) la pratique correspondante ?

Dans l'immédiat, j'ai rédigé. Façon de discuter en somme.

L'idée[1] quoiqu'il en soit de proposer ainsi en fin de scolarité un patch-

1 En allant plus loin, je ne serais d'ailleurs pas hostile à la conception sur ce modèle d'une épreuve de concours de recrutement au niveau du CAPES qui pourrait se présenter comme demande de résolution "critique" d'un pannel d'exercices d'évaluation destinés aux paliers de la scolarité au long de laquelle on va enseigner, en quelque sorte "de la maternelle…à (l'entrée à) l'université". Je viens au fond, dans cet esprit, de rendre ma copie…

work d'une vingtaine d'exercices (4h à 12 mn × exercice... ?) de difficulté médiane entre les extrêmes[2] ici évoqués me semblerait (sauf erreur, je rejoins là P. Legrand) tout à fait compatible avec des objectifs sérieux de formation tout en étant sûrement plus efficace en terme d'évaluation que nos pratiques en cours.

Extraits "Mathematics-ULEAC"

Epreuve n°1

• *Une suite arithmétique de 1 201 termes a pour raison 0,01. La somme des termes est 4 804. Quel est le premier terme ?*

u_1, premier terme et paramètre. Raison notée r ($r = 0{,}01$)

Terme "général" : $u_n = u_1 + (n-1)r$

$S_{1201} = \Sigma_{1\leq n\leq 1201}\, u_n = \Sigma_{1\leq n\leq 1201}\, [u_1 + (n-1)r] = 1\,201\, u_1 + r.\Sigma_{1\leq n\leq 1200}\, n$

Pré requis : $\Sigma_{1\leq k\leq p}\, k = p(p+1)/2$

$S_{1201} = 1201 u_1 + 0{,}01 \times (1200(1200+1)/2) = 1201\, u_1 + 7206$

Par : $S_{1201} = 4\,804$, il vient : $u_1 = -2$.

Questions : - que penser de "cette" rédaction ?
- y a-t-il un mode de rédaction attendu ?
- quels types de rédactions ont été de fait produits.

Anecdote : proposé en première semaine de colles en math.sup. PCSI (sans doute à un mauvais sujet... mais dans un lycée parisien prestigieux).

Résultat : échec au bout de 10 minutes de recherches fondées sur :
- l'idée (vraie) : $u_{1201} + u_1 = u_{1200} + u_2 = $ etc...
- l'affirmation (fausse) : $u_{1201} = u_1 + 1\,201 \times r$.

• *Du sable tombe sur le sol (horizontal) à raison de 0,15 cm³ par seconde Le tas de sable a constamment la forme d'un cône droit circulaire de demi-angle au sommet 30°. La chute commence à l'instant 0. Au bout de t secondes, la hauteur du cône est y cm. En considérant le volume du sable à cet instant,*

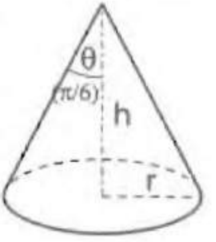
---

2 ...je m'avoue franchement "épaté" par les présupposés des exercices du Japon (TODAI), surtout je crois par le n°3 (sur l'équation du troisième degré) si je les pense comme soumis à des "bacheliers". Je crois que les attentes devraient plutôt se situer du côté de ma deuxième solution, mais dans tous les cas, la remarque de P. Legrand sur les effets de tels exercices "chez nous" me paraît relever de l'euphémisme. La familiarité mathématique correspondante est je crois, par rapport à nos élèves, au moins du niveau d'une bonne fin de Math. Sup.

a) Montrer que $y^3 = 27t/20\pi$.

b) Trouver la vitesse d'accroissement de la hauteur du tas à l'instant 60 (en cm s^{-1} avec 3 décimales).

c) Trouver la vitesse d'accroissement de l'aire latérale du tas à l'instant 60 (en cm s^{-1} avec 3 décimales).



Solution :

$r = h.\tan\theta \Rightarrow V(t) = [\pi h^3 \tan^2\theta]/3$

Mais : $V(t) = 0{,}15\,t$ et donc : $0{,}15\,t = \pi y^3/9$

Soit $y^3 = 1{,}35\,t/\pi = 27\,t/20\pi$.

On en déduit :

$$y = [27\,t/20\pi]^{1/3} = 3.t^{1/3}/(20\pi)^{1/3}$$

On en déduit :

$$dy/dt = t^{-2/3}/(20\pi)^{1/3} = 1/[20\pi t^2]^{1/3}$$

Soit, pour $t = 60$:

$$dy/dt = 1/[20\pi \times 3\,600]^{1/3} = 1/(72\,000\,\pi)^{1/3}$$

Affichage HP 15C : 0.016412417. Arrondi tel que demandé : 0.016.

Aire latérale : $S = \pi\, r \sqrt{(r^2 + h^2)}$

Par ce qui précède, où $h = y(t)$ et $r = h.\tan\theta$ … il vient :

$$S = \pi\, r\, h \sqrt{(1 + \tan^2\theta)} = \pi\, h^2 \tan\theta \sqrt{1/\cos^2\theta}$$

$$= \pi\, y^2 [\sin(\pi/6)/\cos^2(\pi/6)] = \ldots$$

$S = (2\pi/3)\,y^2 = 6\pi t^{2/3}/(20\pi)^{2/3} = (27\pi/50)^{1/3}.t^{2/3}$

$dS/dt = (2/3)(27\pi/50)^{1/3}.t^{-1/3} = 2[\pi/50t]^{1/3}$

Soit, pour $t = 60$: $dS/dt = 2.(\pi/3\,000)^{1/3}$.

Affichage HP 15C : 0.203098260. Arrondi tel que demandé : 0.203.

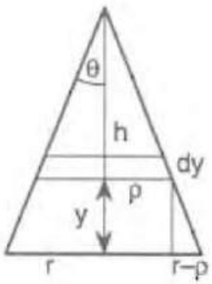
Questions :
- les mêmes d'abord que dans l'énoncé précédent ;
- l'énoncé par ailleurs est-il vraisemblable ? Le modèle d'auto-construction du tas de sable en forme de cône droit d'angle au sommet constant est-il physiquement standard ?

Remarques annexes : On pouvait aussi penser à envisager le remplissage (par le sommet) d'un récipient en forme de cône droit circulaire de demi-angle au sommet θ et de rayon de base r, avec un débit d(t). La question aurait pu être : hauteur y de sable dans le récipient à l'instant t ? … méthodes ?

A l'instant t, le sable remplit jusqu'à la hauteur y(t) le récipient.

$y(0) = 0$.

L'accroissement différentiel de volume occupé est dv/d(t).dt par réfé-



rence au débit ; c'est aussi par référence à l'accroissement différentiel de hauteur dy :
$dv = \pi\rho^2 dy$
$r - \rho = y.\tan\theta$.
On obtient :
$dt = (\pi / d(t)).(r - y \tan\theta)^2 dy$
En posant $u = r - y \tan\theta$, il vient :
$du = -\tan\theta.dy$ et … $dt = -(\pi / d(t)) \tan\theta)\, u^2 du$.
La méthode différentielle ne s'impose évidemment que si le débit n'est pas constant…
Elle renvoie, si c'est le cas à : $t = -(\pi / 3\, d\tan\theta).u^3 + Cte$
Par $t = 0 \Leftrightarrow u = r$, la constante vaut : $\pi r^3 / 3\, d\tan\theta$.
Finalement : $t = (\pi / 3\, d\tan\theta).[r^3 - y \tan\theta)^3]$
… résultat trivialement acquis par différence des volumes des cônes homothétiques de rayons de base respectifs r et $(r - y\tan\theta)$, volume à remplir avec le débit constant d… ou d'ailleurs avec un débit non constant, mais qui renvoie alors à :

$$\int_{[0,t]} d(x)\,dx = (\pi/3 \tan\theta).[r^3 - (r - y \tan\theta)^3]$$

Avec les données numériques proposées ($d = 0{,}15$; $\theta = \pi/6$), le temps de remplissage total sera donc en fonction du rayon de base r (par $y = r/\tan\theta$ en fin de remplissage) :

$$t = 20\,\pi\, \sqrt{3r^3/9}$$

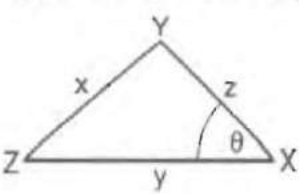
Les temps respectivement obtenus par auto construction d'un tas de sable de rayon de base r et par remplissage du récipient de même forme sont les mêmes. On le contrôle en reprenant la formule $y^3 = 27t/20\pi$ et en l'appliquant à $y = r\sqrt{3}$.

Tout cela est-il évident ? Ces remarques sont-elles du coup un complément pédagogiquement intéressant ? A quel niveau ?

Epreuve n° 2

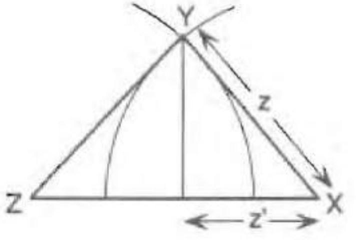
• *n° 2 : Dans un triangle XYZ, XY = 4 cm, YZ = 5 cm, XZ = 6 cm.*

Quel est le cosinus de l'angle $\widehat{X}$: 5/6, 3/4, 2/3, 9/16, 1/8 ?



Prérequis probable :
$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta$
D'où l'on tirera :
$\cos\theta = 27/48 = 9/16$.

Peut-on, dans l'hypothèse éventuellement explixite selon laquelle, dans un QCM, l'une des réponses proposées est correcte, refuser une construction basée sur :
- un tracé à la règle et au compas du triangle,
- un "mesurage" (au double décimètre) de la longueur z' de la projection de XY sur XZ,
- une évaluation à la calculatrice (?) de la plus petite des différences (en module)
  $\{|z'/z - 5/6|\ ;\ |z'/z - 3/4|\ ;\ |z'/z - 2/3|\ ;\ |z'/z - 9/16|\ ;\ |z'/z - 1/8|\}$
- une décision fondée sur l'argument : la "bonne réponse" correspond à la différence minimum.



On évalue ici : $z' = 2{,}3$
Soit : $z'/z = (2{,}3)/4 = 23/40$
D'où :
$|z'/z - 5/6| = 31/120 = 124/480$
$|z'/z - 3/4| = 7/40 = 84/480$
$|z'/z - 2/3| = 11/120 = 44/480$
$|z'/z - 9/16| = 6/480$
$|z'/z - 1/8| = 18/40 = 216/480$
... et DONC (???) la réponse : **9/16.**

• *n° 27 : Cocher les propositions correctes :*
  - *l'équation $e^x = 5x - 1$ a 3 racines réelles*
  - *elle a, entre 0 et 1, une racine et une seule*
  - *elle a, entre 2 et 3, une racine et une seule*

Là aussi, qu'acceptera-t-on comme support de réponse, outre la classique étude par tableau de variation de la fonction $y = y(x) = e^x - 5x + 1$?
- une représentation graphique "papier-crayon" pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ de la courbe $y = y(x)$ (ou des deux courbes $y = e^x$ et $y = 5x - 1$) assortie d'un argument sur la notion de "croissance exponentielle" pour $x > 3$?
- la reproduction (affirmée comme telle) de l'écran d'une calculatrice graphique avec représentation de ladite courbe $y = y(x)$ (ou des deux courbes $y = e^x$ et $y = 5x - 1$) sur le segment [0,3] avec de nouveau l'argument de croissance exponentielle au-delà ?
- la recopie des résultats affichés par une calculatrice disposant d'un logiciel de résolution d'équation (d'un *"solver"*!) auquel on fournit l'équation $e^x - 5x + 1 = 0$ à "résoudre" ?
- ou bien, si l'énoncé fourni est exhaustif, le simple "cochage" des bonnes réponses (les deux dernières) ?

Les QCM d'aptitude générale (U.S.A)

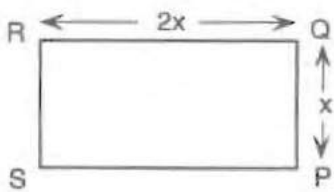
• *Si $x + y = 6$ et $y + z = 9$, combien vaut z.*
Réponses proposées :
A) 2 ; b) 3 ; C) 6 ; D) 7 ; E) les données ne suffisent pour conclure.

Rapidement :

Système "sous-déterminé". Interprétable par exemple comme caractérisation de la droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $M_0(0, 6, 3)$ et de direction définie par $U(1, -1, 1)$.

On peut discuter la réponse E proposée. Est-elle parfaitement dénuée d'ambiguïté ? Les données permettent de conclure : on vient de le faire... Conclure veut-il nécessairement dire "affirmer en l'exhibant qu'une seule valeur de z convient" ?

• *Un rectangle PQRS étant donné (voir la figure), on a $PQ = x$ et $QR = 2x$. Quel pourcentage du périmètre représente la somme $PQ + QR + RS$?*
Réponses proposées :
A) 50%, B) 66 2/3%, C) 75%, D) 80%, E) 83 2/3%



$s = PS + QR + RS = 4x$
périmètre $p = 6x$
$s/p = 2/3 = 200/300 = \dots$
$\dots = 198/300 + 2/300 = \dots$
$\dots = 66 + 2/3/100$
B est la bonne réponse.

• *Un damier a x rangées de x cases alternativement blanches et noires, les 4 coins étant blancs. S'il y a B cases blanches et N cases noires, combien vaut $B - N$?*
Réponses proposées :
A) - 1; B) 0 ; C) 1 ; D) 4 ; E) on ne peut conclure.

L'énoncé du damier peut poser un réel problème de logique...

S'il s'agit d'un damier que l'on a réellement fabriqué, son existence entraîne la nécessité pour x d'être un nombre impair. A partir de là, l'équilibre de la répartition est équitable sur les $(x - 1)$ premières rangées et c'est sur la dernière que doit se faire la différence. Les cases extrêmes de cette rangée étant blanches, les $(x - 1)$ premières correspondent à $(x - 1)/2$ doublets (blanche-noire) et la bonne réponse est la réponse C : $B - N = 1$.

Si x est impair, la bonne réponse est encore C, mais si x est pair, le damier proposé n'existe pas et sa non existence valide toutes les réponses. C'est le principe du *"ex falso sequitur quodlibet"* :

$\{P \Rightarrow Q\}$ est vrai si P est faux, sans contrainte sur Q.

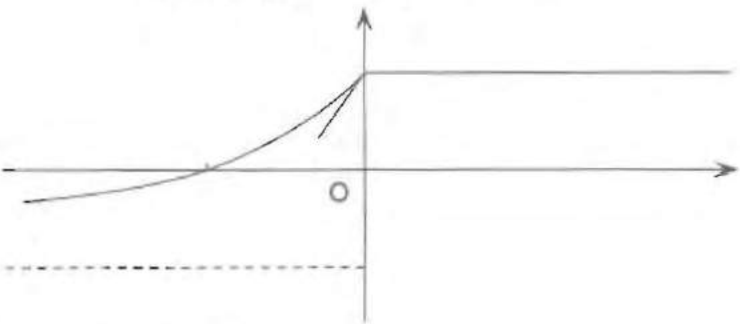
L'énoncé ne dit pas que le damier existe, mais il reste à s'appuyer sur la valeur "existentielle" du présent de l'indicatif : "un damier à x rangées...". Il a, il possède, il montre, il manifeste...donc, il "existe", sauf si l'on est de mauvaise foi.

Calculus AB, exercice 4

• *On donne f par $f(x) = (|x| - 2)/(x - 2)$*
a) Trouver tous les zéros de f.
b) Trouver $f'(1)$.
c) Trouver $f'(-1)$.
d) Trouver l'ensemble des valeurs prises par f.

Par morceaux : $x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) = (x+2)/(2-x)$; s'annule pour $x = -2$.
$f'(x) = 4/(2-x)^2$; $f'(-1) = 4/9$.
Dérivable à gauche ($f'(0-) = 1$) en 0.
Définit une bijection croissante de $[-\infty, 0]$ sur $]-1,1]$.
$x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) = 1$ (prolongement par continuité pour $x = 2$).
$f'(x) = 0$ (accessoirement : $f'(1) = 0$).
Dérivable à droite en 0 ($f'(0+) = 0$).

Globalement : - ensemble des valeurs prises : $]-1, 1]$
- partout dérivable sauf en 0.



Calculus BC, exercice 6

• *Une rumeur se répand dans une communauté selon la loi $dy/dt = 2y(1-y)$, où y est la proportion de la population qui à l'instant t est au courant de la rumeur.*

a) Quelle proportion de la population est au courant de la rumeur à l'instant où elle se propage le plus vite ?

b) Si à l'instant $t = 0$, dix pour cent de la population sont déjà au courant, trouver y en fonction de t.

c) A quel instant t la rumeur se propage-t-elle le plus vite ?

a) La vitesse de propagation maximum correspond au maximum de $y \rightarrow y(1-y)$ sur $[0,1]$. C'est le problème du maximum du produit de deux nombres de somme constante (ici égale à 1). Ce maximum est atteint pour la valeur de la demi somme (ici pour $y = 1/2$).

b) Condition initiale : $y(0) = 0,1 \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$ (y : "proportion"). Etude "en y" sur $]0,1[$ d'abord : ...

On lit : $2dt = dy / y(1-y)$.

On décompose : $1/y(1-y) = 1/y + 1/(1-y)$

On primitive des deux côtés : $2t + k = \ln y - \ln(1-y) = \ln[y/(1-y)]$.

Par $k = -\ln K$ on lit : $2t = \ln(Ky/(1-y)]$ soit $y = e^{2t}/(K + e^{2t})$

Condition initiale : $K = 9$.

Finalement : $y = e^{2t}/(9 + e^{2t})$

$t \rightarrow y$ est une bijection croisssante de $[0, +\infty[$ sur $[0,1 ; 1[$.

L'étude limitée à $]0,1[$ en est justifiée "a posteriori".

c) Le maximum de la vitesse de propagation ($y = 1/2$) correspond, par cette bijection, à $t = 0,5 \ln 9 = \ln 3$. Affichage : 1.098612289 à 5×10^{-10} près.

Que dire de ces deux "petits" exercices ? Peut-être qu'ils supposent plus de sang froid et d'assurance que de connaissances, au moins pour le premier quand on sait les blocages liés à la valeur absolue... Mais aussi, sauf erreur, pour le second, que la première pierre des méthodes de primitivation des fractions rationnelles ait été posée et que la recherche de $y = y(t)$ en passant par $t = t(y)$ ait déjà été pratiquée... ce qui finalement n'en fait pas des exercices si "petits" que cela!

N.D.L.R. Nous publierons ultérieurement d'autres énoncés et les commentaires de C. Jeanbrau.