Journées Nationales de l'APMEP 2006

MODELISATION MATHEMATIQUE DE PHENOMENES PHYSIQUES, DU COLLEGE AU BTS.

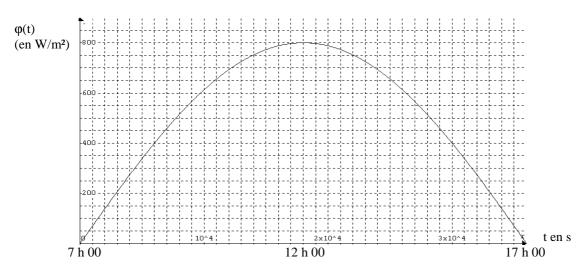
<u>Problème</u>: (Thème: Primitives, équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants, pour classes de 1^{ères}, Terminales, BTS. Calcul itératif par tableur pour classes de 3^{ème}, 2^{nde})

Un capteur solaire vitré à eau de 15 m² est situé sur le toit d'une maison située à une latitude de 45 °. Ce toit, orienté au sud, est incliné de 30° par rapport à l'horizontale.

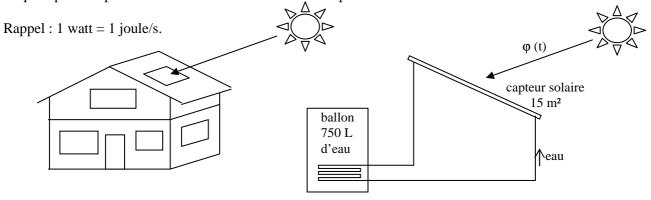
On se propose d'étudier l'apport énergétique (pour le chauffage de la maison) de ce capteur solaire lors d'une journée de la fin du mois de janvier où la température extérieure est de 0 °C, avec toutefois du soleil de 7 h 00 à 17 h 00.

En $1^{\text{ère}}$ approximation, nous pouvons considérer que le flux solaire ϕ (en W/m²) arrivant sur la vitre du capteur entre 7 h 00 et 17 h 00 est sinusoïdal, de valeur maximale 800 W/m² à 12 h 00, nul avant 7 h 00 et après 17 h 00 :

$$\varphi(t) = \dots \sin \dots$$
 (avec t en secondes et t = 0 à 7 h 00 du matin)



L'eau qui parcourt ce capteur réchauffe les 750 L d'un ballon de stockage cylindrique (thermiquement isolé), lesquels peuvent parcourir le circuit des radiateurs ou du plancher chauffant au besoin.



1) On considère dans un 1^{er} temps que le rendement de ce capteur reste constant et égal à 45 % (45 % du flux solaire incident sur la vitre est transféré à l'eau du ballon de stockage).

Si on considère que le système de chauffage est arrêté durant la journée (la maison étant inoccupée ou seulement chauffée par le rayonnement solaire direct à travers les vitrages, de 7 h 00 à 17 h 00), comment va évoluer entre 7 h 00 et 17 h 00 la température T(t) de l'eau du ballon si cette température est de 19 °C à 7 h 00 ? On peut négliger les déperditions de chaleur à travers les parois du ballon.

2) De façon plus précise, le flux de chaleur utile d'un capteur solaire est égal à la partie du flux solaire incident traversant le vitrage et tombant sur l'absorbeur (plaque noire) diminuée des déperditions thermiques entre le capteur et l'air extérieur (proportionnelles à l'écart de température entre le capteur et l'air extérieur) :

$$\phi_{\text{utile}} = \beta \phi - K(T_m - T_{\text{ext}})$$

avec φ le flux solaire incident sur la vitre en W/m²

 β le facteur optique du capteur ($\beta \approx 0.8$ pour les capteurs courants)

T_m la température moyenne du capteur en °C (approximée à la moyenne entre les températures d'entrée T_e

et de sortie
$$T_s$$
 de l'eau parcourant le capteur : $T_m = \frac{T_e + T_s}{2}$)

T_{ext} la température de l'air extérieur en °C

K le coefficient de déperditions thermiques en W/°C ($K \approx 3.5$ pour les capteurs courants)

Le rendement d'un capteur solaire est donc $\eta(t) = \frac{\varphi_{utile}(t)}{\varphi(t)} = \beta - K \frac{(T_m(t) - T_{ext})}{\varphi(t)}$.

Avec
$$T_{\text{ext}} = 0$$
 °C, $\beta = 0.8$ et K = 3.5, on obtient donc $\eta(t) = 0.8 - 3.5$ $\frac{T_{\text{m}}(t)}{\varphi(t)} = 0.8 - 3.5$ $\frac{T_{\text{m}}(t) + T_{\text{m}}(t)}{2\varphi(t)}$.

Si on considère de plus que la température de l'eau à l'entrée du capteur est égale à celle du ballon (T_e = T(t)), on

obtient :
$$\eta(t) = 0.8 - 3.5 \frac{T(t) + T_s(t)}{2\varphi(t)}$$
.

De plus, l'écoulement dans le capteur peut être vu comme une succession d'étapes, de durée Δt (en s), comprenant : le remplissage total du capteur par une masse m d'eau à la température T_e , son chauffage par le flux de chaleur $15\eta\phi$ et enfin la vidange de toute l'eau du capteur à la température T_s .

La masse m d'eau reçoit la quantité de chaleur m c_{eau} (T_s - T_e).

Cette quantité de chaleur est aussi $15 \eta \phi \Delta t$ (puisque 1 W = 1 J/s).

Ainsi 15
$$\eta \phi \Delta t = m c_{eau} (T_s - T_e)$$

$$15 \eta \varphi = \frac{m}{\Delta t} c_{\text{eau}} (T_{\text{s}} - T_{\text{e}})$$

15 $\eta \phi = q_m c_{eau} (T_s - T_e)$ avec q_m le débit massique (en kg/s) de l'eau dans le capteur

Avec $c_{eau} = 4185 \text{ J/kg.}^{\circ}\text{C}$, un débit massique $q_m = 0.025 \text{ kg/s}$ et $T_e(t) = T(t)$, on obtient :

15
$$\eta(t) \varphi(t) = 0.025 \times 4185 (T_s(t) - T(t))$$

ce qui permet d'exprimer $T_s(t)$ en fonction de T(t), $\varphi(t)$ et $\eta(t)$.

On peut négliger les déperditions de chaleur à travers les parois du ballon.

Si on considère encore que le système de chauffage est arrêté durant la journée, comment va évoluer entre 7 h 00 et 17 h 00 la température T(t) de l'eau du ballon si cette température est de 19 °C à 7 h 00 ?

3) D'après les calculs de la question 2, quelle quantité d'énergie sera apportée par ce capteur durant cette journée à l'eau du ballon ?

Combien d'heures de chauffage permettra-t-elle alors si la puissance thermique nécessaire en soirée et durant la nuit est de 5 kW (si on néglige les déperditions de chaleur à travers les parois du ballon, avec une maison normalement isolée et si la température extérieure est de 0 $^{\circ}$ C) ?

Corrigé du problème :

1) On raisonne sur un intervalle de temps très court dt (en s).

 $0.45 \times 15 \times \varphi(t) \times dt = quantité de chaleur (> 0, en J) fournie par le capteur à l'eau du ballon pendant la durée dt$

avec
$$\varphi(t) = 800 \sin(\frac{\pi}{36000}t)$$
 = flux solaire (en W/m²) arrivant sur le capteur, le temps t étant exprimé en

s.

 $750 \times c_{eau} \times (T(t+dt) - T(t)) = quantité de chaleur (> 0, en J)$ absorbée par les 750 kg d'eau du ballon lorsque leur température (moyenne) passe de T(t) à T(t+dt) avec $c_{eau} = 4185 \text{ J/kg.}^{\circ}\text{C}$

Ainsi:
$$750 \times 4185 \times (T(t + dt) - T(t)) = 0.45 \times 15 \times 800 \times \sin(\frac{\pi}{36000}t) \times dt$$

$$750 \times 4185 \times \frac{T(t+dt) - T(t)}{dt} = 0.45 \times 15 \times 800 \times \sin(\frac{\pi}{36000}t)$$

D'où, lorsque dt tend vers 0 et en faisant l'hypothèse que $t \mapsto T(t)$ est dérivable sur $[0; 36\,000]$:

(E):
$$750 \times 4185 \times \text{T'}(t) = 0.45 \times 15 \times 800 \times \sin(\frac{\pi}{36000}t)$$

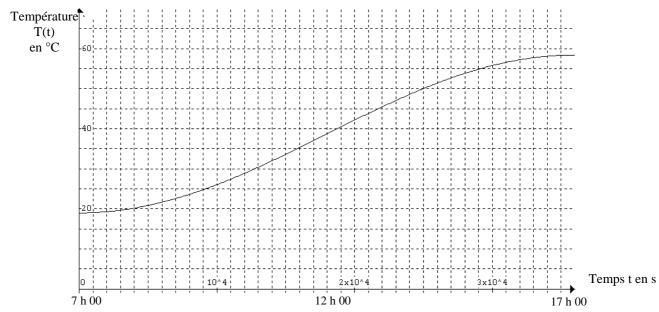
(E):
$$3138750 \times \text{T'(t)} = 5400 \times \sin(\frac{\pi}{36000}\text{t})$$

(la vitesse de montée de T est proportionnelle au flux incident sinusoïdal)

(E):
$$T'(t) \approx 1.72 \times 10^{-3} \times \sin\left(\frac{\pi}{36000}t\right)$$
 $d'où T(t) \approx -1.72 \times 10^{-3} \times \frac{36000}{\pi} \times \cos\left(\frac{\pi}{36000}t\right) + K$

Or T(0) = 19
$$\Rightarrow$$
 -1,72 × 10⁻³ × $\frac{36000}{\pi}$ × cos 0 + K ≈ 19 \Rightarrow K ≈ 38,7

$$\Rightarrow T(t) \approx -1.72 \times 10^{-3} \times \frac{36000}{\pi} \times \cos\left(\frac{\pi}{36000} t\right) + 38.7 \approx -19.7 \cos\left(\frac{\pi}{36000} t\right) + 38.7 \text{ (avec T(t) en °C et t en s)}$$



 $T(18000) \approx 38.7$ °C = température (moyenne) de l'eau du ballon à 12 h 00

 $T(36000) \approx 58.4$ °C = température (moyenne) de l'eau du ballon à 17 h 00

2) On a 15
$$\eta(t)$$
 $\varphi(t) = 0.025 \times 4185$ $(T_s(t) - T(t))$ \Leftrightarrow $T_s(t) = \frac{15\eta(t)\varphi(t)}{0.025 \times 4185} + T(t)$.

Or $\eta(t) = 0.8 - \frac{3.5}{2\varphi(t)}$ $(T(t) + T_s(t))$ \Leftrightarrow $\eta(t) = 0.8 - \frac{3.5}{2\varphi(t)}$ $(T(t) + \frac{15\eta(t)\varphi(t)}{0.025 \times 4185} + T(t))$
 \Leftrightarrow $(1 + \frac{3.5 \times 15}{2 \times 0.025 \times 4185})$ $\eta(t) = 0.8 - \frac{3.5}{\varphi(t)}$ $T(t)$
 \Leftrightarrow $\eta(t) \approx 0.6395 - \frac{2.798}{\varphi(t)}$ $T(t)$ $(\eta \text{ diminue si T augmente ou si } \varphi \text{ diminue})$

On raisonne alors à nouveau sur un intervalle de temps très court dt (en s).

 $\eta(t) \times 15 \times \phi(t) \times dt = quantité de chaleur (> 0, en J)$ fournie par le capteur à l'eau du ballon pendant la durée dt avec $\phi(t) = 800 \sin(\frac{\pi}{36000}t) = flux$ solaire (en W/m²) arrivant sur le capteur (le temps t étant exprimé en s).

 $750 \times c_{eau} \times (T(t + dt) - T(t))$

= quantité de chaleur (> 0, en J) absorbée par les 750 kg d'eau du ballon lorsque leur température (moyenne) passe de T(t) à T(t + dt) avec $c_{eau} = 4185$ J/kg.°C

Ainsi:
$$750 \times 4185 \times (T(t+dt) - T(t)) = \eta(t) \times 15 \times \varphi(t) \times dt$$
$$750 \times 4185 \times \frac{T(t+dt) - T(t)}{dt} = \eta(t) \times 15 \times \varphi(t)$$

D'où, lorsque dt tend vers 0 et en faisant l'hypothèse que $t \mapsto T(t)$ est dérivable sur $[0; 36\ 000]$:

(E):
$$750 \times 4185 \times \text{T'(t)} \approx (0.6395 - \frac{2.798}{\varphi(t)} \text{T(t)}) \times 15 \times \varphi(t)$$

(E):
$$3138750 \times T'(t) \approx 9,5925 \times \varphi(t) - 41,97 \times T(t)$$

(E):
$$3138750 \times \text{T'}(t) + 41,97 \times \text{T}(t) \approx 9,5925 \times 800 \sin\left(\frac{\pi}{36000}t\right)$$

(E):
$$3138750 \times \text{T}'(t) + 41,97 \times \text{T}(t) \approx 7674 \times \sin\left(\frac{\pi}{36000}t\right)$$

. (E') : $3\ 138\ 750 \times \text{T}$ '(t) + $41.97 \times \text{T}$ (t) = 0 admet pour solution générale T (t) = k $e^{-1.337.10^{-5}t}$

. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme T (t) = a $\sin(\frac{\pi}{36000}\,t) + b\cos(\frac{\pi}{36000}\,t)$ avec a et b des constantes.

$$\Rightarrow$$
 T'(t) = a $\frac{\pi}{36000}$ cos($\frac{\pi}{36000}$ t) - b $\frac{\pi}{36000}$ sin($\frac{\pi}{36000}$ t)

a, b ? tels que 3 138 750 × [a $\frac{\pi}{36000}$ cos($\frac{\pi}{36000}$ t) - b $\frac{\pi}{36000}$ sin($\frac{\pi}{36000}$ t)] + 41,97 × [a sin($\frac{\pi}{36000}$ t) + b

$$\cos(\frac{\pi}{36000}t)] = 7674 \times \sin(\frac{\pi}{36000}t) + 0\cos(\frac{\pi}{36000}t)$$

$$\begin{cases} 3 \ 138 \ 750 \ a \ \frac{\pi}{36000} + 41,97 \ b = 0 \\ 41,97 \ a - 3 \ 138 \ 750 \ b \ \frac{\pi}{36000} = 7674 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \approx 4,194 \\ b \approx -27,375 \end{cases}$$

d'où T (t) $\approx 4,194 \sin(\frac{\pi}{36000} t) - 27,373 \cos(\frac{\pi}{36000} t)$ est une solution particulière de (E).

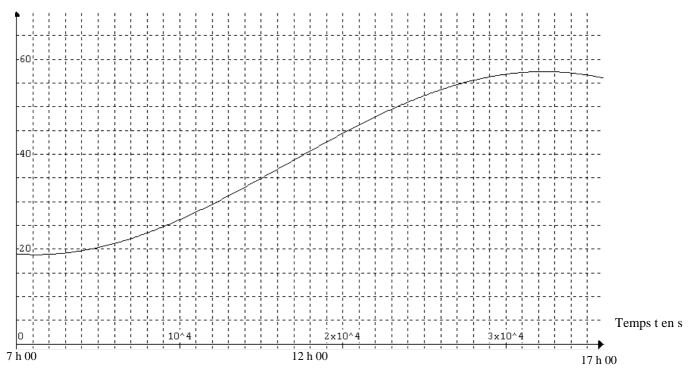
. T (t)
$$\approx$$
 k $e^{-1,337.10^{-5}t} + 4,194 \sin(\frac{\pi}{36000}t) - 27,373 \cos(\frac{\pi}{36000}t)$ est donc la solution générale de (E).

.
$$T(0) = 19 \implies k e^0 + 4{,}194 \sin 0 - 27{,}373 \cos 0 = k - 27{,}373 \approx 19 \implies k \approx 46{,}37$$

$$T(t) \approx 46,37 e^{-1,337.10^{-5}t} + 4,194 \sin(\frac{\pi}{36000}t) - 27,373 \cos(\frac{\pi}{36000}t)$$

est donc la solution particulière de (E) cherchée (avec T(t) en °C et t en s).

Température T(t) en °C



 $T(18000) \approx 40.6$ °C = température (moyenne) de l'eau du ballon à 12 h 00

 $T(36000) \approx 56.0$ °C = température (moyenne) de l'eau du ballon à 17 h 00

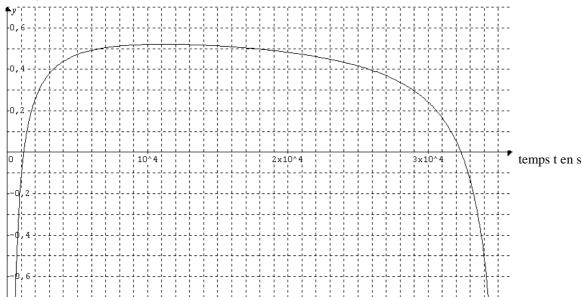
 $T(32340) \approx 57.4$ °C = température (moyenne) de l'eau du ballon à 15 h 59 min

On observe que lorsque l'éclairement est faible, la température de l'eau du ballon de stockage diminue : l'eau se refroidit en passant dans le capteur au lieu de s'y réchauffer en raison des déperditions thermiques vers l'air extérieur à 0 °C. Ce phénomène est ici surtout marqué lorsque la température de l'eau est élevée (donc peu avant le coucher du soleil). Pour la journée étudiée ici, la pompe qui fait circuler l'eau dans le capteur doit donc être commandée à l'arrêt à 15 h 59.

Connaissant T(t), on peut exprimer le rendement du capteur d'après $\eta(t) \approx 0,6395 - \frac{2,798}{\varphi(t)}$ T(t):

$$\eta(t) \approx 0,6395 - \frac{2,798}{800 \sin(\frac{\pi}{36000}t)} \left[46,37 e^{-1,337.10^{-5}t} + 4,194 \sin(\frac{\pi}{36000}t) - 27,373 \cos(\frac{\pi}{36000}t) \right]$$

Rendement $\eta(t)$



Après 15 h 59 min, le flux solaire incident ϕ est insuffisant pour chauffer l'eau et même pour compenser les pertes thermiques entre le capteur et l'air extérieur : le rendement devient négatif , l'eau du ballon réchaufferait l'air extérieur si la pompe faisant circuler l'eau dans le capteur fonctionnait.

3) La quantité d'énergie apportée par ce capteur durant cette journée est : $750 \times c_{eau} \times (T(32300) - 19) \approx 750 \times 4185 \times (57,4 - 19) \approx 120\,528\,000\,J$ ce qui représente 129 947 000 / 3 600 000 \approx 33,5 kWh, et qui est la quantité d'énergie que fournirait une chaudière fonctionnant à la puissance de 5 kW pendant 33,5 / 5 = 6,7 h (soit 27,9 % de 24 h ou 47,9 % de 14 h). En schématisant, pour cette journée ensoleillée de la fin du mois de janvier, on peut dire que l'énergie solaire stockée durant la journée dans le ballon permet de chauffer la maison de 17 h 00 à 23 h 42.

Remarques générales : Le fait de disposer d'un plancher chauffant (dalle en béton parcourue par un circuit d'eau) augmente la capacité de stockage de l'énergie solaire tout en améliorant le rendement η du capteur (puisque T_m est diminuée). Les travaux de recherche ont montré qu'une épaisseur de dalle de 12 à 15 cm était optimale. Une chaudière (à gaz, à granulés de bois, ...) permet d'ajuster la température de l'eau du circuit de chauffage. De tels capteurs solaires vitrés à eau (de 15 m²) peuvent permettre de couvrir entre 30 % et 70 % des besoins annuels de chaleur (pour le chauffage et l'eau chaude) d'une maison normalement isolée en France selon sa situation géographique.

Par ailleurs, et à titre d'exemples remarquables, des modèles (allemands, autrichiens, suisses) de maisons avec une isolation thermique très soignée (sans fuites excessives), de 200 m² habitables, utilisant des capteurs solaires alliés à des vitrages généreux au sud, parviennent à ne consommer que l'équivalent de 300 L de fioul par an, soit 10 à 12 fois moins qu'une maison de même taille mais isolée thermiquement de façon plus conventionnelle.

Compte tenu de la part importante (≈ 33 %) du chauffage des bâtiments pour un pays comme la France dans sa consommation énergétique, des économies considérables d'énergie seraient possibles avec une isolation performante des bâtiments et l'utilisation de l'énergie solaire thermique.

Résolution approchée par tableur (pour les classes de 3ème et 2^{nde})

On peut effectuer un calcul itératif pour obtenir les valeurs de T(t) toutes les secondes, même en tenant compte du fait que le rendement du capteur n'est pas constant au cours de la journée (comme dans la question 2).

On a 15
$$\eta(t)$$
 $\phi(t) = 0.025 \times 4185$ $(T_s(t) - T(t))$ \iff $T_s(t) = \frac{15\eta(t)\varphi(t)}{0.025 \times 4185} + T(t)$.

Or $\eta(t) = 0.8 - \frac{3.5}{2\varphi(t)}$ $(T(t) + T_s(t))$ \iff $\eta(t) = 0.8 - \frac{3.5}{2\varphi(t)}$ $(T(t) + \frac{15\eta(t)\varphi(t)}{0.025 \times 4185} + T(t))$
 \iff $(1 + \frac{3.5 \times 15}{2 \times 0.025 \times 4185})$ $\eta(t) = 0.8 - \frac{3.5}{\varphi(t)}$ $T(t)$
 \iff $\eta(t) \approx 0.6395 - \frac{2.798}{\varphi(t)}$ $T(t)$ $(\eta \text{ diminue si T augmente ou si } \varphi \text{ diminue})$

On raisonne alors sur des intervalles de temps d'1 seconde, sur lesquels on considère $\eta(t)$, $\phi(t)$ et T(t) comme constants.

 $\eta(t) \times 15 \times \phi(t) \times 1 \approx$ quantité de chaleur (> 0, en J) fournie par le capteur à l'eau du ballon pendant 1 s après l'instant t

avec $\varphi = 800 \sin{(\frac{\pi}{36000} t)} = \text{flux solaire (en W/m²)}$ arrivant sur le capteur (le temps t étant exprimé en s).

ou en prenant pour φ une liste de 36 000 valeurs expérimentales, ce qui améliorerait encore la modélisation.

$$750 \times c_{eau} \times (T(t+1) - T(t))$$

= quantité de chaleur (> 0, en J) absorbée par les 750 kg d'eau du ballon lorsque leur température (moyenne) passe de T(t) à T(t+1) avec $c_{eau} = 4185 \text{ J/kg.}^{\circ}\text{C}$

Ainsi:
$$750 \times 4185 \times (T(t+1) - T(t)) \approx \eta(t) \times 15 \times \varphi(t) \times 1$$

et $T(t+1) \approx T(t) + \frac{15}{750 \times 4185} \eta(t) \times \varphi(t)$

L'idée est alors d'itérer les calculs suivants :

- Calcul de $\eta(0)$ à partir de T(0) = 19 °C et $\phi(0) = 0,00001$ (ne pas prendre $\phi(0) = 0$ pour éviter d'avoir η indéfini) à l'aide de la relation $\eta(0) \approx 0,6395$ $\frac{2,798}{\varphi(0)}$ T(0).
- Calcul de T(1) à l'aide de la relation T(1) \approx T(0) + $\frac{15}{750 \times 4185} \eta(0) \times \varphi(0)$
- Calcul de $\eta(1)$ à partir de T(1) et $\varphi(1)$ à l'aide de la relation $\eta(1) \approx 0.6395 \frac{2.798}{\varphi(1)} T(1)$.
- Calcul de T(2) à l'aide de la relation T(2) \approx T(1) + $\frac{15}{750 \times 4185} \eta(1) \times \varphi(1)$
- Calcul de $\eta(t)$ à partir de T(t) et $\phi(t)$ à l'aide de la relation $\eta(t) \approx 0.6395$ $\frac{2.798}{\varphi(t)} T(t)$.
- Calcul de T(t+1) à l'aide de la relation T(t+1) \approx T(t) + $\frac{15}{750 \times 4185} \eta(t) \times \varphi(t)$

Avec un tableur, les instructions peuvent être :

| | A | В | С | D |
|---|--------------|-------------------------|-------------------------|---------------------|
| 1 | temps t en s | flux phi(t) en W/m² | T(t) en °C | rendement |
| 2 | 0 | 0,00001 | 19 | =0,6395-2,798*C2/B2 |
| 3 | =A2+1 | =800*SIN(PI()/36000*A3) | =C2+15/(750*4185)*D2*B2 | =0,6395-2,798*C3/B3 |

Des valeurs expérimentales du flux solaire incident $\phi(t)$ peuvent aussi être insérées dans la colonne B. En surlignant les lignes 3 à 36002 et en recopiant vers le bas les formules de la ligne 3 par « Edition », « Remplissage en bas » ou « Recopie vers le bas », on obtient en une dizaine de secondes les 36000 valeurs approchées de la température T(t) pour les 10 heures de l'expérience, dont quelques unes sont présentées cidessous :

| temps t en s | T(t) en °C approchée par tableur | T(t) théorique en °C obtenue avec l'équation | |
|--------------|----------------------------------|--|--|
| | (colonne C) | différentielle (question 2) | |
| 1 577 | 18,8664 | 18,8637 | |
| 10 433 | 26,8565 | 26,8548 | |
| 16 909 | 38,5619 | 38,5603 | |
| 23 584 | 50,3544 | 50,3525 | |
| 32 341 | 57,4001 | 57,3977 (valeur maximale) | |
| 36 000 | 56,0306 | 56,0281 | |

Remarque : Nous aurions pu aussi utiliser $T(t+1) \approx T(t) + \frac{15}{750 \times 4185} \eta(t) \times \phi(t)$

$$T(t+1) \approx T(t) + \frac{15}{750 \times 4185} \times (0,6395 - \frac{2,798}{\varphi(t)}T(t)) \times \varphi(t)$$

 $T(t+1) \approx 0.9999866 \ T(t) + 3.056 \times 10^{-6} \ \phi(t)$ mais les valeurs du rendement devraient être recalculés ensuite.

Conclusion de la méthode approchée : Pour ce problème, les valeurs obtenues par des calculs itératifs sur tableur avec un pas d'1 seconde sont très proches des valeurs obtenues par la résolution de l'équation différentielle (question 2, avec le rendement variable). Les écarts sont inférieurs à 0,01 °C sur des valeurs comprises entre 19 et 57,4 °C.

Le calcul itératif par tableur peut donc permettre à des élèves de 3^{ème} et 2^{nde} la résolution approchée, avec une très bonne précision, de problèmes physiques déjà complexes. Cette résolution pourrait les préparer à aborder plus tard le calcul différentiel, sans remplacer ce dernier, notamment parce que les solutions exactes permettent de juger si un schéma itératif est suffisamment précis.

Sources:

- Institut National de l'Energie Solaire (INES et INES Education) (centre de recherche CNRS/Université de Savoie/CEA/CSTB, mis en place en juillet 2006) Parc technologique de Savoie Technolac BP 258 73375 Le Bourget du Lac www.institut-solaire.com grosjean@ines-solaire.com

- « Guide de l'énergie solaire thermique »

Association Savoyarde de Développement des Energies Renouvelables (ASDER) 73094 Chambéry www.asder.asso.fr info@asder.asso.fr

Christophe Pêtre IREM de CLERMONT FERRAND