

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1993 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère (O, \vec{u}, \vec{v}) orthonormal direct, on considère les points A, B et M d'affixes respectives 2, $-i$ et z , avec $z \neq -i$ et $z \neq 2$.

1. Donner une interprétation géométrique de $\arg \frac{z-2}{z+i}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z pour lesquels $\arg \frac{z-2}{z+i} = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.
On note C le centre du cercle (C) contenant E.
 - a. Montrer que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
 - b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre B qui transforme A en C.
 - c. En déduire la forme algébrique de l'affixe de C.

EXERCICE 2

4 points

Soit, dans le plan orienté, un triangle équilatéral direct ABC, c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. On note O son centre de gravité. On considère des points M, N, P, respectivement sur les segments [AB], [BC] et [CA], tels que $AM = BN = CP$ (on suppose $M \neq A$ et $M \neq B$).

1.
 - a. Justifier qu'il existe une rotation unique r telle que $r(A) = B$ et $r(M) = N$ (on énoncera le théorème utilisé). Déterminer son angle.
 - b. Soit ρ la rotation vectorielle associée à r .
Montrer que $\rho(AB) = BC$. En déduire l'image de B par r et le centre de r .
2.
 - a. Quelles sont les images de N et de P par r ?
 - b. Montrer que le triangle MNP est un triangle équilatéral de centre de gravité O.
3. Soit les cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ circonscrits respectivement aux triangles APM, CPN et BMN. Il n'est pas demandé de dessiner Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ?
 - a. Montrer que Γ_1 passe par O. Quels autres résultats pourrait-on obtenir par une démonstration analogue ?
 - b. Montrer que Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ont le même rayon.

PROBLÈME

12 points

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = xe^x - nx.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A. Soit la fonction g_n définie sur \mathbb{R} par $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Calculer la dérivée de g_n faire le tableau de variation de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n et que α_n est positif ou nul. Que vaut α_1 ?
3. Montrer que $\alpha_n = \ln \frac{n}{1 + \alpha_n}$ et que $0 \leq \alpha_n \leq \ln n$.
4.
 - a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x \leq x - 1$ (1).
 - b. En utilisant (1), déterminer le signe de $g_n(\ln \sqrt{n})$.
 - c. En déduire que : $\frac{1}{2} \ln n \leq \alpha_n$.

Quelles sont les limites des suites de terme général α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

B.

1. Calculer la dérivée de f_n , faire le tableau de variations de f_n et déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.
Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1 + \alpha_n}$.
2. Montrer que \mathcal{C}_n a une asymptote D_n que l'on déterminera. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_n et D_n .
3. Déterminer les points d'intersection de \mathcal{C}_n et de l'axe des abscisses, et préciser la position de \mathcal{C}_n par rapport à cet axe.
4. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_n et \mathcal{C}_{n+1} .
5.
 - a. Montrer que $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,40$.
Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès, de α_2 .
En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.
 - b. Tracez \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sur le même graphique en mettant en évidence les résultats précédents (on choisira comme unité 10 cm sur les deux axes). On précisera les tangentes en O à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
 - c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine borné limité par \mathcal{C}_2 et l'axe des abscisses (on pourra utiliser une intégration par parties).