Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1996

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Une urne contient $n+8$ boules : huit boules blanches et n boules noires, n étant un entier au moins égal à deux.
Tous les tirages effectués sont équiprobables.
On fait tirer par un joueur des boules de l'urne.
Pour chaque boule blanche tirée il gagne un franc, mais pour chaque noire il perd deux francs.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. Dans cette question, le joueur effectue deux tirages : il tire une première boule de l'urne, il la remet dans l'urne, puis il effectue un deuxième tirage.
   - **a.** Montrer qu'il peut, soit gagner deux francs, soit perdre un franc, soit perdre quatre francs.
   - **b.** Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant à chacun des cas.
   - **c.** Calculer, en fonction de n l'espérance mathématique du gain du joueur.
     Y a-t-il une valeur de l'entier n pour laquelle cette espérance est nulle ? Si oui, la donner.
2. Dans cette question, n est fixé égal à 6 : il y a donc 6 boules noires et 8 boules blanches dans l'urne.
   Le joueur tire trois boules simultanément.
   - **a.** Montrer qu'il peut, soit gagner trois francs, soit perdre six francs, soit perdre trois francs, soit ne rien gagner ni ne rien perdre.
   - **b.** Calculer la probabilité correspondant à chaque cas.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$; unité graphique 1 cm.

1. On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 9z - 27$.
   Factoriser $P(z)$ puis résoudre l'équation $P(z) = 0$ (on pourra rechercher une racine réelle simple).
   Quelle est la nature du triangle formé par les points images des solutions de cette équation ?
2. Les points qui sont introduits dans la suite de l'exercice seront placés sur une même figure remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
   On nomme A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d tels que

$$a = 3, \qquad b = -3\text{i}, \qquad c = 3\text{i} \quad \text{et} \quad d = 2 - \frac{5}{2}\text{i}.$$

   - **a.** Déterminer l'affixe du point E, image de D par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   - **b.** Déterminer l'affixe du point I, symétrique de B par rapport à D puis celle du point J, symétrique de C par rapport à E.
   - **c.** Déterminer l'affixe du point F, milieu du segment [IJ].
   - **d.** Préciser, en justifiant, la nature du quadrilatère ODFE.
   - **e.** On désigne par z_{A}, z_{I} et z_{J}les affixes des points A, I et J.
     On pose $Z = \dfrac{z_{\text{I}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{J}} - z_{\text{A}}}$.
     Calculer Z.
     En interprétant géométriquement le module et un argument de Z, déterminer la nature du triangle AIJ.

EXERCICE 2 : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 POINTS**

On considère dans le plan orienté un losange ABCD de centre O.
On pose $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \alpha$ (modulo2π).
On appelle r_{A} la rotation de centre A et d'angle α et r_{B} la rotation de centre B qui transforme C en A.
Pour tout point M du plan, on nomme M_1 et M_2 les points définis par

$$\text{M}_1 = r_{\text{A}}(\text{M}) \quad \text{et} \quad \text{M}_2 = r_{\text{B}}^{-1}(\text{M}).$$

1. On pose $f = r_{\text{A}} \circ r_{\text{B}}$.
   a. Exprimer l'angle de la rotation r_{B} en fonction de α.
   En déduire la nature de la transformation f.
   b. Déterminer $f(\text{C})$. Caractériser la transformation f.
   c. Montrer que, pour tout point M du plan, le milieu du segment $[\text{M}_1,\text{M}_2]$ est indépendant de M.
2. **a.** En considérant le triangle AMM_1 déterminer une mesure, à $k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$), de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{MM}_1}, \overrightarrow{\text{MA}}\right)$ en fonction de α.
   b. Montrer que, pour tout point M du plan distinct de A et de B, on a l'égalité :
   $\left(\overrightarrow{\text{MM}_1}, \overrightarrow{\text{MM}_2}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ (modulo π).
   c. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés.

PROBLÈME **5 POINTS**

La partie A de ce problème est consacrée à l'étude d'une fonction.
Dans la partie B, on met en évidence l'unique solution d'une équation.
La partie C permet de déterminer une valeur approchée de cette solution.

Partie A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(1-x)]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$; (unité graphique : 5 cm).

1. **a.** Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 0 puis vers 1.
   Préciser les asymptotes de $\mathscr{C}$.
   b. Étudier le sens de variation de f.
2. **a.** Montrer que $\mathscr{C}$ admet pour centre de symétrie le point A(0,5 ; 0).
   b. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
   On pose $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$.
   Étudier les variations de la fonction φ ; en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et D.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et D dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Partie B

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

   a. En utilisant les variations de la fonction h, démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule α dans l'intervalle $]0\,;1[$.

   b. Montrer que $0,8 \leqslant \alpha \leqslant 0,9$.

   c. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;1[$, on a : $\left|f'(x)\right| \geqslant 2$.

2. On appelle S la réflexion dont l'axe est la droite Δ d'équation $y = x$.
On appelle $\mathscr{C}'$ l'image de la courbe $\mathscr{C}$ par S.

   a. Démontrer qu'un point M de coordonnées x et y appartient à $\mathscr{C}'$ si, et seulement si, l'on a : $y \in]0\,;\,1[$ et $2x = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$.
   En déduire que $\mathscr{C}'$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

   b. Tracer Δ et la courbe $\mathscr{C}'$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ de la partie A.

   c. Montrer que le nombre α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

Partie C Détermination d'une valeur approchée du nombre α

1. On appelle I l'intervalle $[0,8\,;\,0,9]$.

   a. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

   b. Montrer que, pour tour réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à l'intervalle I.

   c. Montrer que, pour tour réel x de l'intervalle I, on a : $0 \leqslant g'(x) \leqslant 0,3$.

   d. En déduire que, pour tour réel x de l'intervalle I, on a :

$$|g(x) - \alpha| \leqslant 0,3|x - \alpha|.$$

2. On considère la suite (u_n) d'éléments de I définie par : $u_0 = 0,8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.
Montrer que, pour tout entier naturel n on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,3\,|u_n - \alpha|$$

puis

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0,1 \times (0,3)^n.$$

Déterminer un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.
Donner une valeur approchée de u_p à 10^{-4} près.