

Durée : 3 heures

∞ Baccalauréat ES Antilles–Guyane ∞  
14 septembre 2012

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples).

Pour chaque question, une seule proposition exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de chaque question, et recopier la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

Barème : une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2 - e^{2x - \ln(3)}$$

et soit  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. La fonction  $f$  :

- a. est croissante sur  $\mathbb{R}$     b. est décroissante sur  $\mathbb{R}$     c. n'est pas monotone sur  $\mathbb{R}$

2. Le réel  $f(1)$  est égal à :

- a.  $5 - e^2$     b.  $\frac{6 - e^2}{3}$     c.  $-0,46$     d.  $\frac{\ln(3)}{2}$

3. La limite de  $f$  en  $+\infty$  est égale à :

- a.  $+\infty$     b.  $-\infty$     c. 2    d. 0

4. La tangente à la courbe  $C$  au point d'abscisse  $\ln(3)$  a pour équation :

- a.  $y = -3x + 3\ln(3) - 1$     b.  $y = -3x - 1$   
c.  $y = -6x + 6\ln(3) - 1$     d.  $y = -x + \ln(3) - 3$ .

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'entreprise E produit un modèle de lave-vaisselle. La production de ce lave-vaisselle est répartie sur trois sites industriels A, B, C, qui sont d'importances inégales.

- Le site A assure 60 % de la production.
- Le site B assure 30 % de la production.
- Le site C assure le reste de la production.

Après plusieurs années de commercialisation, on note que 37 % des lave-vaisselles en provenance du site A connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation ; 25 % des lave-vaisselles provenant du site B connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation, et 12 % de ceux provenant du site C connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation. On choisit au hasard un lave-vaisselle produit par l'entreprise E.

Dans la suite on désigne par A, (respectivement par B, C) l'évènement « le lave-vaisselle choisi est issu du site de production A (respectivement B, C) ».

On désigne par S, l'évènement « le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans » ;  $\bar{S}$  désigne l'évènement contraire de S.

Dans cet exercice les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

1.
  - a. Préciser les valeurs des probabilités  $p(A)$  et  $p(B)$ .
  - b. On note  $p_A(S)$  (respectivement  $p_B(S), p_C(S)$ ) la probabilité de l'évènement  $S$  sachant que l'évènement  $A$  (respectivement  $B, C$ ) est réalisé ; calculer  $p_A(S), p_B(S)$  et  $p_C(S)$ .
  - c. Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur les branches adéquates les probabilités données dans l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que le lave-vaisselle provienne du site  $A$  et connaisse une panne avant 5 ans ?
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement  $S$  est 0,309.
4. Le lave-vaisselle est tombé en panne avant 5 ans d'utilisation ; quelle est la probabilité qu'il provienne du site  $B$  ?
5. *Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
L'entreprise  $E$  assure le service après-vente : si le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans d'utilisation, elle finance la réparation, dont le prix est estimé à 110 euros par appareil réparé.  
Déterminer, pour l'entreprise, le coût moyen par lave-vaisselle de ces réparations.

**EXERCICE 2****5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants. On a constaté que :

- si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de 0,8 ;
- si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de 0,4.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.

Si  $n$  est un entier naturel non nul, on appelle  $s_n$  la probabilité que l'employé choisi mange au « self » le  $n$ -ième jour, et par  $t_n = 1 - s_n$  la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le  $n$ -ième jour.

Pour l'état initial, on admet que  $s_1 = t_1 = 0,5$ , c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.

Dans la suite, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $P_n$  la matrice  $P_n = (s_n \quad t_n)$ .

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle  $P_{n+1} = P_n \times M$  où  $M$  désigne la matrice  $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$  et  $n$  un entier naturel non nul.
3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $s_{n+1} = \frac{2}{5}s_n + \frac{2}{5}$ .
6. Dans la suite, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $u_n = s_n - \frac{2}{3}$ .
  - a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$  et de premier terme  $u_1 = -\frac{1}{6}$ .

- b. Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , où  $n$  est un entier naturel non nul.
- c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $s_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$ .
- d. Déterminer la limite de la suite  $(s_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter ce résultat.

**EXERCICE 3****4 points****Commun à tous les candidats**

Afin de mesurer l'évolution de l'utilisation du vélo, une communauté urbaine organise le comptage régulier des vélos en plusieurs points de l'agglomération. Le tableau ci-dessous indique le nombre moyen, sur un mois, de vélos comptés par jour.

Mois	Mars 2005	Juin 2005	Décembre 2005	Juin 2006	Décembre 2006	Juin 2007
Rang du mois : $x_i$	0	3	9	15	21	27
Nombre moyen de vélos comptés par jour (en milliers) : $y_i$	3,9	4,4	5,1	6,4	7,1	7,6

- Représenter le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques : en abscisse, 1 centimètre pour représenter 3 mois et en ordonnées, 1 centimètre pour représenter 1 millier.
- Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  et le placer sur la représentation graphique.
- Déterminer, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients obtenus à  $10^{-2}$  près.  
Tracer la droite d'ajustement sur la représentation graphique.
- À l'aide de l'ajustement réalisé, déterminer une estimation du nombre moyen de vélos que l'on pouvait prévoir par jour au mois de décembre 2007 (on arrondira le résultat à  $10^{-1}$ ).
- On sait qu'en décembre 2007, le nombre moyen de vélos observés a été de 7600. Déterminer, en pourcentage, l'erreur commise dans l'estimation précédente.

**EXERCICE 4****7 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0,5; 18]$  par :

$$f(x) = 4\ln(3x+1) - x + 3$$

Le graphique de l'annexe donne la représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$ .

- On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $[0,5; 18]$ . Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0,5; 18]$ , on a :

$$f'(x) = \frac{-3x+11}{3x+1}.$$

2. Étudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[0,5; 18]$ .
3. Vérifier que l'équation  $f(x) = 6$  admet une unique solution dans  $[0,5; 18]$ , que l'on note  $\alpha$ .  
Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près par défaut.
4. On note  $F$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0,5; 18]$  par :

$$F(x) = \frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \frac{x^2}{2} - x.$$

- a. Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0,5; 18]$ .
- b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale  $\int_1^8 f(x) dx$  et donner une valeur approchée de cette intégrale à  $10^{-1}$  près.

### Partie B

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique  $x$  centaines de pièces est égal à  $f(x)$ , en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1 800 pièces.

En utilisant les résultats précédents et en justifiant, répondre aux questions suivantes.

1. Pour quelle quantité de pièces produites, arrondie à l'unité, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal? Quel est ce bénéfice, arrondi à la dizaine d'euros?
2. Pour quelles quantités de pièces produites, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice supérieur ou égal à 6 000 euros?
3. Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces.  
On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

**ANNEXE**