∽ Brevet de technicien supérieur ∾
Opticien–lunetier 13 mai 2015

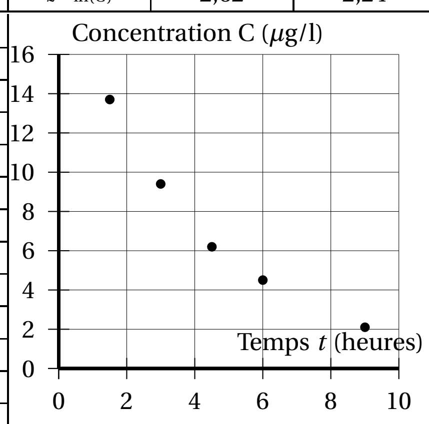
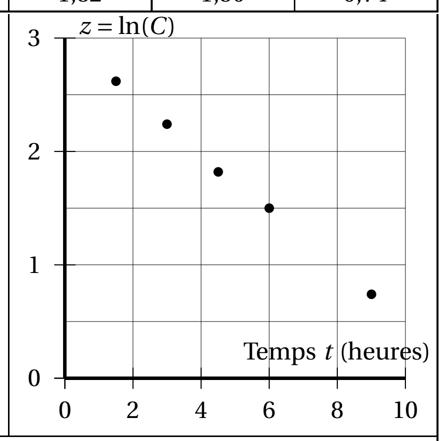
Exercice 1 **10 points**

On veut traiter un patient par diffusion d'un produit actif dans l'humeur aqueuse de l'œil. Ce produit est injecté dans le sang par voie intraveineuse. En raison de la barrière hématocamérulaire, les concentrations du produit dans le sang et dans l'humeur aqueuse évoluent de manière différente.
L'objectif de cet exercice est de modéliser l'évolution de la concentration, d'abord dans le sang, puis dans l'humeur aqueuse.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Modélisation de la concentration du produit dans le sang

On a injecté à l'instant $t = 0$ une certaine quantité de produit dans le sang du patient. On a mesuré la concentration C (en μg/L) du produit à différentes valeurs de t (en heures).
Les valeurs obtenues sont entrées aux lignes 1 et 2 de la feuille de calcul suivante.
On pose $z = \ln(C)$ où ln désigne le logarithme népérien. Les valeurs de z, arrondies au centième, sont affichées à la ligne 3.
On a représenté, sur deux graphiques, le nuage des points de coordonnées $(t\ ;\ C)$ et le nuage des points de coordonnées $(t\ ;\ z)$.

C17	=COEFFICIENT.CORRELATION(B1:F1;B2:F2)					
	A	B	C	D	E	F
1	Temps t (heures)	1,5	3	4,5	6	9
2	Concentration C (μg/L)	13,7	9,4	6,2	4,5	2,1
3	$z = \ln(C)$	2,62	2,24	1,82	1,50	0,74
4–16						
17	Coefficient de corrélation $(t\ ;\ C)$: $-0{,}9560$					
18	Coefficient de corrélation $(t\ ;\ z)$: $-0{,}9996$					

1. **a.** À l'aide des graphiques et sans calcul, expliquer pourquoi un ajustement affine de z en t semble mieux approprié qu'un ajustement affine de C en t.

   b. On a calculé en cellule C17 le coefficient de corrélation linéaire de l'ajustement affine de C en t selon la méthode des moindres carrés et en cellule C18 celui de l'ajustement de z en t. En quoi ces calculs confirment-ils la réponse précédente ?

2. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en t selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$. Arrondir a et b au millième.
3. En déduire une expression de C en fonction de t de la forme $C = C_0\text{e}^{at}$, où C_0 est à arrondir à l'unité.

   Comment peut-on interpréter, dans le contexte, le coefficient C_0 ?
4. Selon le modèle précédent, au bout de combien de temps la concentration du produit sera-t-elle inférieure à 1,5 μg/L ? Arrondir à la minute.

   Expliquer la démarche utilisée pour répondre.

B. Modélisation de la concentration dans l'humeur aqueuse

On admet que la fonction correspondant à la concentration du produit dans l'humeur aqueuse (en μg/L) en fonction du temps t (en heures), vérifie l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,05y = 0,05g(t),$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$, y' sa fonction dérivée et $g(t)$ la concentration du produit dans le sang (en μg/L) à l'instant t.
On suppose que : $g(t) = 20\text{e}^{-0,25t}$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0,05y = 0.$$

   On fournit la formule suivante.

Equation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$y(t) = k\text{e}^{-\frac{b}{a}t}$

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Recopier sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification. La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   La fonction h définie sur $[0~;~+\infty[$ par $h(t) = \lambda\text{e}^{-0,25t}$ est solution de l'équation différentielle (E) pour λ valant :

-5	-100	20

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

C. Exploitation du modèle précédent

Dans cette partie, on admet que la concentration du produit dans l'humeur aqueuse (en μg/L), en fonction du temps t (en heures) est modélisée par :

$$f(t) = 5\text{e}^{-0,05t} - 5\text{e}^{-0,25t}.$$

Pour les questions suivantes, toute démarche pertinente sera prise en compte.
On peut éventuellement s'appuyer sur les résultats suivants obtenus à l'aide d'un logiciel.

Algèbre	Graphique

Droite

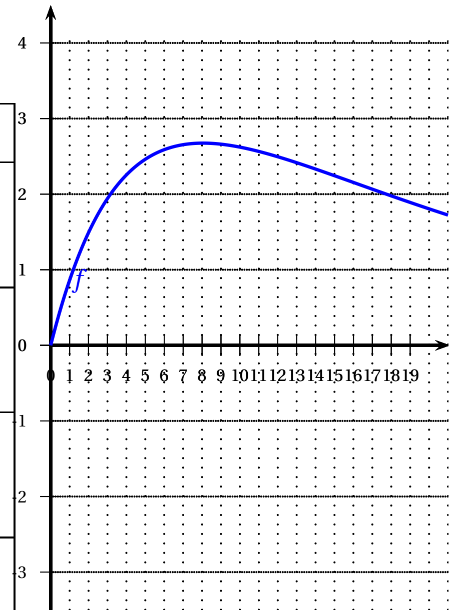
- $a : y = 2$

Fonction

- $f(t) = 5\mathrm{e}^{-0,05*t} - 5\mathrm{e}^{-0,25*t}$

$(0 \leqslant t \leqslant 100)$

Calcul formel – 0L15.ggb	
1	$5 * \exp(-0,05 * t) - 5 * \exp(-0,25 * t)$ Dérivée : $\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t}$
2	$-0,25 * \exp(-0,05 * t) * (1 - 5 * \exp(-0,2 * t))$ Développer : $\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-\frac{t}{25}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t}$
3	$t/20 - t/5$ $\rightarrow -\frac{1}{4}t$
4	$5 * \exp(-0,05 * t) - 5 * \exp(-0,25 * t)$ intégrale $20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} - 100\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t} + c_2$



Dans la fenêtre de calcul formel, la commande 1 correspond au calcul de la dérivée de f, les commandes 2 et 3 permettent de vérifier une factorisation de $f'(t)$ et la commande 4 fournit une primitive de f. Ces résultats sont admis et n'ont pas à être justifiés.

1. Calculer la concentration moyenne $m = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$ du produit dans l'humeur aqueuse sur l'intervalle de temps $[0 ; 12]$.
2. Quelle est la concentration maximale dans l'humeur aqueuse et au bout de combien de temps est-elle atteinte ? Justifier la réponse en précisant la démarche.
3. Peut-on dire que la concentration du produit dans l'humeur aqueuse reste supérieure à 2 μg/L pendant au moins 10 heures ? Justifier la réponse en précisant la démarche.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont, sauf mention du contraire, à arrondir à 10^{-3}.

La vertéporfine est un médicament utilisé pour soigner une certaine forme de dégénérescence maculaire liée à l'âge (D. M. L. A.).

Pour étudier l'efficacité de la vertéporfine pour soigner cette forme de D. M. L. A., une étude a été réalisée auprès de 240 patients atteints de D. M. L. A et âgés de plus de 50 ans.

Lors de cette étude, les patients ont été répartis en deux groupes constitués au hasard :

- 160 patients ont reçu un traitement à base de vertéporfine ;
- 80 patients ont reçu un placebo.

Après un an de traitement, les patients ont été examinés pour déterminer s'ils avaient perdu moins de trois lignes d'acuité visuelle sur l'échelle E. T. D. R. S. par rapport à leur vision de départ. Un tel patient est nommé « répondeur ». Le tableau suivant indique pour chaque groupe le nombre de répondeurs.

Groupe	Traitement à base de vertéporfine	Placebo
Nombre de répondeurs	108	36

A. Probabilités conditionnelles

On tire au hasard une fiche parmi celles des 240 patients concernés par l'étude.
On désigne par V l'évènement « la fiche tirée est celle d'un patient ayant reçu le traitement à base de vertéporfine ».
On désigne par R l'évènement « la fiche tirée est celle d'un répondeur ».

1. Construire un arbre de probabilités ou un tableau correspondant à la situation.
2. Calculer $P(R \cap V)$.
3. Montrer, par un calcul, que $P(R) = 0,6$.
4. Sachant que la fiche tirée est celle d'un répondeur, quelle est la probabilité que ce patient ait reçu un traitement à base de vertéporfine ?

B. Loi binomiale

Dans cette partie, on s'interroge sur la probabilité d'observer au moins 108 répondeurs sur un échantillon aléatoire de taille 160 issu d'une population où la proportion des répondeurs est 0,6.
On tire au hasard et avec remise 160 fiches parmi celles des 240 patients concernés par l'étude. On suppose que la probabilité qu'une fiche tirée soit celle d'un répondeur est $p = 0,6$.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement ainsi décrit, associe le nombre de fiches correspondant à des répondeurs.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et en donner une interprétation.
3. À l'aide de la calculatrice,
   a. donner la probabilité qu'il y ait exactement 96 répondeurs parmi les 160 fiches prélevées ;
   b. calculer $P(X \geqslant 108)$.

C. Loi normale et test d'hypothèse

Dans cette partie, on cherche à déterminer s'il existe une différence significative entre les proportions de répondeurs parmi les patients traités par vertéporfine et ceux ayant reçu un placebo.
On note F_1 la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 160 patients traités par vertéporfine, associe la fréquence des répondeurs. On suppose que F_1 suit la loi normale de moyenne p_1 inconnue et d'écart type $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{p_1\left(1-p_1\right)}{160}}$.
On note F_2 la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 80 patients ayant reçu un placebo, associe la fréquence des répondeurs. On suppose que F_2 suit la loi normale de moyenne p_2 inconnue et d'écart type $\sigma_2 = \sqrt{\dfrac{p_2\left(1-p_2\right)}{80}}$.
On note D la variable aléatoire définie par $D = F_1 - F_2$.
L'hypothèse nulle est $H_0 : p_1 = p_2$.

L'hypothèse alternative est $H_1 : p_1 \neq p_2$.
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.
On admet que sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne 0 et d'écart type $\sqrt{\dfrac{0,6 \times 0,4}{160} + \dfrac{0,6 \times 0,4}{80}} \approx 0,067$.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer, en utilisant la propriété ci-dessous, un réel positif h tel que $P(-h \leqslant D \leqslant h) = 0,95$.

Propriété de la loi normale : si X est une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3. Sur un échantillon aléatoire de 160 patients traités par vertéporfine, on a observé 108 répondeurs.

Sur un échantillon aléatoire de 80 patients ayant reçu un placebo, on a observé 36 répondeurs.

Peut-on, au seuil de signification de 5 %, rejeter l'hypothèse H_0 ?