CAPES À AFFECTATION LOCALE À MAYOTTE

Section mathématiques

8 avril 2024 épreuve 1

Problème 1 : autour des travaux de Sophie Germain

Partie A

Problème de Sophie Germain : « Pour quelles valeurs de n, n étant un nombre entier naturel, le nombre n^4+4 est-il un nombre premier ? »

1. Démontrer qu'un nombre entier naturel n pair ne peut pas être solution du problème de Sophie Germain.
2. **a.** Un nombre entier se terminant par 1 peut-il être solution du problème ?
   b. Le nombre 3 est-il solution du problème ?
   c. Expliquer pourquoi aucun entier naturel se terminant par 3, 7 ou 9 ne peut être solution du problème.
3. Démontrer que, pour tout n entier naturel, si n est un multiple de 5 non multiple de 10, alors le nombre entier n^4+4 se termine par 9.
4. Vérifier que, pour tout n entier naturel :
$$n^4+4=\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right)$$
5. Déterminer la réponse au problème de Sophie Germain.

Partie B

Un nombre premier p est dit nombre premier de Sophie Germain si $2p+1$ est aussi un nombre premier.

1. Citer un nombre premier qui est un nombre premier de SophieGermain.
2. Citer un nombre premier qui n'est pas un nombre premier de SophieGermain.
   Une chaîne de Cunningham est une liste de nombres premiers $\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$ telle que pour tout i compris entre 1 et n,/ : $p_{i+1}=2p_i+1$.
   (41, 83, 167) est une chaine de Cunningham de longueur 3.
3. **a.** Déterminer la chaîne de Cunningham qui commence par 2.
   b. Quelle est la longueur de cette chaîne ?
   La fonction **prem** écrite en langage Python teste si un nombre entier naturel strictement supérieur à 2 est premier.

```
def prem(n) :
    for i in range (2, n) :
        if n%i==0 : # % donne le reste de la division de n par i
            return False
        return True
```

4. Créer une fonction **premSG**, utilisant la fonction **prem**, qui permet de savoir si un nombre entier strictement supérieur à 2 est un nombre de Sophie Germain.

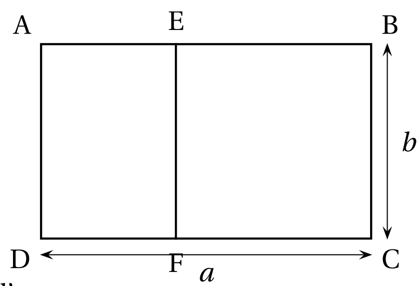
Problème 2 : autour du nombre d'or

On considère deux nombres réels strictement positifs L et l tels que $L > l$ et tels que le rapport $\dfrac{L+l}{L}$ est égal au rapport $\dfrac{L}{l}$. Le rapport obtenu se note φ et est appelé le nombre d'or.

Partie A

1. Démontrer les propositions suivantes :
   - **a.** $1+\dfrac{1}{\varphi}=\varphi$.
   - **b.** φ est solution de l'équation $x^2-x-1=0$.
   - **c.** $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$.
2. Résoudre l'équation $x^2-x-1=0$ et donner une valeur approchée de φ à 10^{-3}près.
   Soit φ' la solution négative de l'équation $x^2-x-1=0$.
   Démontrer que $\varphi'=-\dfrac{1}{\varphi}$.

Le rectangle ABCD a pour longueur a et pour largeur b telles que $\dfrac{a}{b}=\varphi$.
Un tel rectangle est appelé rectangle d'or.
On construit le carré EBCF dans le rectangle ABCD tel que E appartient à [AB] et F appartient à [DC].



3. Démontrer que le rectangle AEFD est un rectangle d'or.

Partie B

- f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$
- g est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$
- (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$
- (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=g(v_n)$
- $I=[1\,;\,2]$

1. **a.** Démontrer que $f(I)\subset I$ et que $g(I)\subset I$..
   b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.
2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. **a.** Vérifier que, pour tout $x\in[1\,;\,2]$, $g(x)-g(\varphi)=-\dfrac{1}{x\varphi}(x-\varphi)$.
   b. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n et v_{n+1} sont de part et d'autre du nombre φ.

   c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|v_{n+1} - \varphi\right| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}\left|v_n - \varphi\right|$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|v_n - \varphi\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n \left|1 - \varphi\right|$.

   d. En déduire la limite de la suite (v_n).

Partie C

- φ est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$
- φ' est la solution négative de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$
- (F_n) est la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
- (G_n) est la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $G_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - (\varphi')^{n+1}\right)$.

1. Calculer G_0 et G_1.

2. Démontrer les deux propositions suivantes :

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n+3} = \varphi^{n+2} + \varphi^{n+1}$

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\varphi')^{n+3} = (\varphi')^{n+2} + (\varphi')^{n+1}$

   c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$.

3. Vérifier que les suites (F_n) et (G_n) sont égales.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de F_n en fonction de n.

Problème 3 : géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{\mathrm{k}}\right)$.
On considère les points A(2 ; −1 ; 0), B(3 ; −1 ; 2) et C(0; 4; 1).

1. Vérifier que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

2. Soit S(0; 1; 4). Démontrer que le point S n'est pas un point du plan (ABC).

3. Vérifier que les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC), sont (2; 2; 3).

4. En déduire le volume du tétraèdre SABC.

5. Déterminer une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{ASC}}$.

Problème 4 : fonctions

Partie A : étude d'une fonction et résolution d'une équation

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x}$$

1. **a.** Démontrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

   b. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ puis que, sur cet intervalle, $f'(x)$ est du même signe que $1 - 2x$.

c. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = x \quad \text{équivaut à} \quad 2x + \ln(x) = 0.$$

3. Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$h(x) = 2x + \ln(x).$$

a. Étudier les variations de h et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.

b. Justifier que α appartient à l'intervalle $[0{,}4\ ;\ 0{,}5]$.

4. En déduire qu'il existe exactement deux réels solutions de l'équation

$$x\,\mathrm{e}^x = \sqrt{x}.$$

Partie B : intégrale

Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est la fonction définie dans la partie A.
On ne cherchera pas à calculer F.

1. Justifier que F est une fonction croissante.

2. **a.** Démontrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\sqrt{t} \leqslant t + \dfrac{1}{4}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$:

$$F(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t.$$

c. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t.$$

d. En déduire que la fonction F est majorée par $\dfrac{5}{4}$.

e. Interpréter graphiquement ce résultat.