CAPES À AFFECTATION LOCALE À MAYOTTE

Section mathématiques

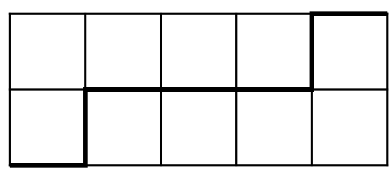
9 avril 2024 épreuve 2

Problème 1 : Vrai -Faux

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. a est un nombre dont l'écriture décimale est 2,024 202 4 ... , la séquence $\overline{2024}$ se répétant indéfiniment.
   Proposition : Il existe deux nombres entiers p et q tels que $a = \dfrac{p}{q}$.
2. Proposition : Une augmentation de 2 % suivie d'une augmentation de 5 % est plus importante qu'une augmentation de 5 % suivie d'une augmentation de 2 %.
3. Proposition : Si on augmente d'un point la note de tous les élèves d'une classe lors d'une évaluation, la moyenne et l'écart-type de cette évaluation augmentent d'un point.
4. Proposition : $\dfrac{21!}{10^6}$ est un nombre entier.
5. Un trajet est un enchainement de déplacements verticaux et horizontaux d'une unité.

   Arrivée

   Départ

   Proposition : Le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le quadrillage ci-dessus est 21.
6. Dans un lot de 10 000 appareils, 1 000 présentent le défaut A, 800 présentent le défaut B et 400 présentent à la fois les défauts A et B.
   Proposition : Les évènements « présenter le défaut A » et « présenter le défaut B » sont indépendants.
7. Il a été établi que le test de dépistage d'une maladie dans une population est :
   - positif dans 96 % des cas pour une personne atteinte d'une maladie ;
   - négatif dans 94 % des cas pour une personne qui n'est pas atteinte par la maladie.

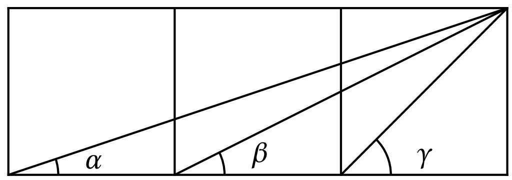
   On note p la probabilité qu'une personne ayant eu un test positif soit atteinte par la maladie.
   Proposition : Pour que p soit supérieure à 0,9 il est nécessaire que plus de la moitié de la population soit atteinte par la maladie.
8. n est un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules vertes, 4 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   Proposition : La probabilité de tirer deux boules de la même couleur est égale à $\dfrac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$.

9. On considère la fonction f définie sur $]0\,;2[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$.
Proposition : La limite de f en 0 est $+\infty$.

10. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2+\cos(x)}{\sqrt{x}}$.
Proposition : La limite de f en $+\infty$ est 0.

11. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$.
Proposition : $I = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{5}$.

12. La figure ci-dessous représente trois carrés accolés.



Proposition : $\alpha+\beta=\gamma$.

13. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\mathrm{B}} = \dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.
Proposition : La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.

14. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
(E) est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que
$\arg\left(\dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z-2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
Proposition : (E) est une droite.

15. Soit z un nombre complexe tel que $|z|=1$.
Proposition : si z' est un nombre complexe tel que $\left|z+z'\right| = 1$, alors $z'=0$.

Problème 2 : inégalités

Partie A

1. On pose $h(x) = 2x^3-3x^2+1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  a. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.
  b. Quel est le signe de h sur $]0\,;\,1]$?

2. Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par
$f(x) = 2\sin(x)+\tan(x)-3x$.
  a. Calculer $f'(x)$.
  b. Déduire de la question 1. b. le signe de $2\cos^3(x)-3\cos^2(x)+1$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
  c. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. En déduire l'inégalité de Huygens :

$$2\sin(x)+\tan(x) \geqslant 3x, \text{ pour tout } x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \sin(x)(4-\cos(x)) - 3x.$$

1. Démontrer que g est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que $\sin(x)(4-\cos(x)) \leqslant 3x$, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

Partie C

En donnant à x la valeur $\dfrac{\pi}{6}$, déduire des parties précédentes un encadrement de π.

Problème 3 : équation différentielle

On cherche à modéliser la quantité de principe actif d'un médicament dans l'organe visé en fonction du temps écoulé depuis la prise du médicament par un patient.
On est conduit à résoudre l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + ky = \mathrm{e}^{-kt}$$

k est une constante strictement positive

t est le temps exprimé en heures, avec $t \geqslant 0$

La quantité de principe actif est exprimée en unité médicamenteuse.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = t\,\mathrm{e}^{-kt}$ est solution de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle
$$(E_0): \quad y' + ky = 0.$$
3. En déduire qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si il existe un réel a tel que pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = (t+a)\,\mathrm{e}^{-kt}$.

On s'intéresse à la situation où la quantité de principe actif prise au départ est d'une unité médicamenteuse. On observe alors que le maximum de présence du principe actif dans l'organe visé chez le patient est atteint au bout d'une heure.

4. En déduire que la situation peut alors être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
6. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f et interpréter ce résultat.
   On considère que l'organisme a éliminé le médicament quand sa quantité dans l'organe visé est inférieure à $0,001$.
7. Déterminer, à la minute près, à quel moment cela se produit selon le modèle.
8. Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t$ et donner une valeur approchée à $0,001$ unités près de la quantité moyenne de principe actif durant les 6 premières heures selon le modèle.

Problème 4 : géométrie dans l'espace

Partie A

L'espace est muni d'un repère orthonormé (0; L.], k).

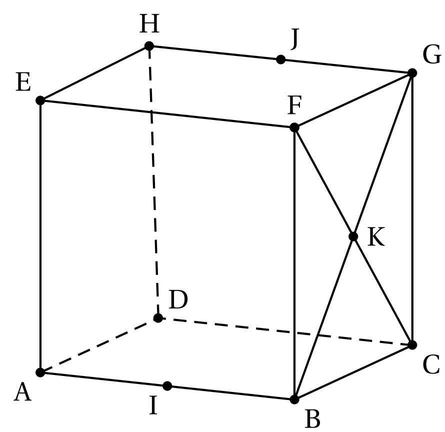
- a, b, c et d sont des réels non tous nuls.
- $\mathscr{P}$ est un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
- $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$.
- A est un point de l'espace de coordonnées $(X_\text{A}\,;\,Y_\text{A}\,;\,Z_\text{A})$.
- H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.
- B est un point du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(X_\text{B}\,;\,Y_\text{B}\,;\,Z_\text{B})$.
- $d(\text{A}, \mathscr{P})$ est la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{BA}} = aX_\text{A} + bY_\text{A} + cZ_\text{A} + d$.

2. Justifier l'égalité : $\left|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{BA}}\right| = \left\|\overrightarrow{n}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\text{HA}}\right\|$.

3. Etablir le résultat général : $d(\text{A}, \mathscr{P}) = \dfrac{|aX_\text{A} + bY_\text{A} + cZ_\text{A} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B



- ABCDEFGH est un cube de côté 1.
- I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [HG].
- K est le centre de la face FGCB.
- $\mathscr{S}$ est la sphère de centre K et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{D}\,;\,\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.

1.
   a. Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un losange et que son aire vaut $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
   b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (DIF) est $x - 2y + z = 0$.
   c. Calculer la distance du point E au plan (DIF).
   d. Déterminer le volume de la pyramide EDIFJ.

2.
   a. Démontrer que la droite (EK) est orthogonale au plan (DIF).
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EK).
   c. Déterminer les coordonnées du point M, intersection de la droite (EK) et du plan (DIF).
   d. Démontrer que le point M appartient à la sphère $\mathscr{S}$.
   e. Démontrer que la sphère $\mathscr{S}$ est tangente au plan (DIF).