Brevet de technicien supérieur septembre 2020
Conception de produits industriels

Exercice 1 : **10 points**

Un formulaire est fourni en fin d'exercice

Une entreprise fabrique une pièce métallique pour la construction automobile.
Pour fabriquer cette pièce métallique, il est nécessaire de chauffer le métal à haute température puis de le faire refroidir.
On s'intéresse dans cette partie à la température de la pièce métallique lors de la phase de refroidissement.
On pose $t = 0$ l'instant de début de refroidissement. La pièce métallique a alors une température de 200 °C.
On décide de modéliser la température de la pièce métallique lors de la phase de refroidissement par une fonction f du temps t définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E): \quad y'(t) + 0,05y(t) = 1,05$$

telle que $f(0) = 200$, où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' est la fonction dérivée de y.
L'unité du temps t est la minute et l'unité de $f(t)$, température de la pièce, est le degré Celsius (°C).

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y'(t) + 0,05y(t) = 1,05$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): \quad y'(t) + 0,05y(t) = 0$.
2. Déterminer la fonction constante g solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. On rappelle que $f(0) = 200$. En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction

Dans cette partie, on admet que $f(t) = 179\text{e}^{-0,05t} + 21$ pour $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

1. Quelle est la température de la pièce métallique 60 minutes après sa sortie du moule ? Arrondir le résultat au degré le plus proche.
2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

3. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. La pièce peut être manipulée dès que sa température est inférieure à 40 °.

a. Justifier qu'il existe un instant t_0 à partir duquel on peut manipuler la pièce.

b. Déterminer la valeur de t_0, on donnera sa valeur exacte, puis une valeur arrondie à la minute près.

FORMULAIRE

Équation différentielle d'ordre 1

Les solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) : $ay'(t) + by(t) = 0$ sont les fonctions y définies sur un intervalle I par :

$$y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \quad \text{avec } k \text{ constante réelle.}$$

Formule de dérivation

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et on a :

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u.$$

Exercice 2 : **10 points**

Une entreprise produit des pièces à l'aide d'une machine-outil.

Partie A : Évolution du chiffre d'affaires

Depuis 2012, l'entreprise a développé une nouvelle démarche commerciale qui lui a permis d'améliorer son chiffre d'affaires.
Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires y_i en millions d'euros	4,41	4,59	4,76	5,1	5,34	5,59	5,67	5,82

1. **a.** Représenter le nuage de points $\mathrm{M}_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour 1 an en abscisse, et 2 cm pour 1 million en ordonnée.
   b. Un ajustement affine de ce nuage de points semble-t-il approprié ? Justifier.
2. Déterminer le point moyen $G(x\ ;\ y)$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax+b$ où a et b sont à arrondir au centième.
4. Pour cette question, on prendra la droite d'équation $y = 0,2x + 4,4$ qui réalise un ajustement de l'évolution du chiffre d'affaire sur cette période.
   a. Tracer cette droite dans le repère de la question 1. a.
   b. Si cette évolution se poursuit, estimer le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2021, au dixième de million près.

Partie B : Pannes de la machine-outil

L'entreprise étudie régulièrement le nombre de pannes survenant sur sa machine-outil.
On note X la variable aléatoire qui, à toute période de 100 jours consécutifs tirés au hasard, associe le nombre de pannes de la machine-outil.
Une étude menée par l'entreprise permet d'admettre que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.
On rappelle que pour tout nombre k entier, on a $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.
Donner les résultats arrondis au centième près.

1. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement : « la machine a strictement plus de 5 pannes pendant la période de 100 jours consécutifs ».
3. Déterminer le plus petit entier n tel que : $P(X \leqslant n) > 0,99$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C : Test de validité d'hypothèse

Parmi les pièces produites, cette entreprise fabrique des tubes métalliques.
On s'intéresse à la fabrication de tubes métalliques dont la longueur doit être de 165 millimètres.
On souhaite vérifier la qualité de la production concernant les dimensions de cette pièce.
On propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne m des longueurs en millimètre des tubes produits.
On note Z la variable aléatoire qui à chaque tube prélevé dans la production associe sa longueur en mm. Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart type $\sigma = 0,6$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 tubes prélevé dans la production, associe la moyenne des longueurs de tube.
L'hypothèse nulle H_0 est : « $m = 165$ ». Dans ce cas la production est dite conforme pour la longueur.
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne $m' = 165$ et d'écart-type $\sigma' = 0,06$.
   Déterminer, sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que
   $P(165 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 165 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon aléatoire de 100 tubes dans la production.
   La moyenne des longueurs des 100 tubes de cet échantillon est 164,91mm.
   Peut-on juger que la qualité de la production est bonne ? Justifier.