# Corrigé du BTS Polynésie – mai 2019
# Services informatiques aux organisations

**Épreuve obligatoire**

## Exercice 1 — 7 points

Après l'obtention de leur BTS SIO, trois amis décident de créer un jeu vidéo nommé « escape game ». Les différentes tâches de la réalisation de ce projet sont décrites dans le tableau suivant.

| Nom simplifié de la tâche | Description de la tâche | Durée en jour | Tâches précédentes |
|---|---|---|---|
| A | Choix du matériel et achats | 1 | F |
| B | Fabrication du matériel | 5 | A |
| C | Inauguration | 1 | E |
| D | Livraison du matériel | 1 | B, A, G |
| E | Mise en place du matériel et essais | 5 | D, H |
| F | Recherche des énigmes | 4 | - |
| G | Recherche des locaux | 9 | - |
| H | Rédaction du scénario complet | 5 | F |

**1.** On détermine le niveau de chacun des sommets.

On part du tableau des prédécesseurs.

On cherche les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de F et de G.

Les sommets F et G sont donc de niveau 0.

| Tâche | Tâches précédentes |
|---|---|
| A | F |
| B | A |
| C | E |
| D | B – A – G |
| E | D – H |
| F | – |
| G | – |
| H | F |

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 0, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de A et H.

Les sommets A et H sont donc de niveau 1.

| Tâche | Tâches précédentes |
|---|---|
| A | ~~F~~ |
| B | A |
| C | E |
| D | B – A – ~~G~~ |
| E | D – H |
| ~~F~~ | – |
| ~~G~~ | – |
| H | ~~F~~ |

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 1, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de B.

Le sommet B est donc de niveau 2.

| Tâche | Tâches précédentes |
|---|---|
| ~~A~~ | ~~F~~ |
| B | ~~A~~ |
| C | E |
| D | B – ~~A~~ – ~~G~~ |
| E | D – ~~H~~ |
| ~~F~~ | – |
| ~~G~~ | – |
| ~~H~~ | ~~F~~ |

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 2, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de D.

Le sommet D est donc de niveau 3.

| Tâche | Tâches précédentes |
|---|---|
| ~~A~~ | ~~F~~ |
| ~~B~~ | ~~A~~ |
| C | E |
| D | ~~B~~ – ~~A~~ – ~~G~~ |
| E | D – ~~H~~ |
| ~~F~~ | – |
| ~~G~~ | – |
| ~~H~~ | ~~F~~ |

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 3, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de E.

Le sommet E est donc de niveau 4.

| Tâche | Tâches précédentes |
|---|---|
| ~~A~~ | ~~F~~ |
| ~~B~~ | ~~A~~ |
| C | E |
| ~~D~~ | ~~B~~ – ~~A~~ – ~~G~~ |
| E | ~~D~~ – ~~H~~ |
| ~~F~~ | – |
| ~~G~~ | – |
| ~~H~~ | ~~F~~ |

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 4, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de C.

Le sommet C est donc de niveau 5.

| Tâche | Tâches précédentes |
|---|---|
| ~~A~~ | ~~F~~ |
| ~~B~~ | ~~A~~ |
| C | ~~E~~ |
| ~~D~~ | ~~B~~ – ~~A~~ – ~~G~~ |
| E | ~~D~~ – ~~H~~ |
| ~~F~~ | – |
| ~~G~~ | – |
| ~~H~~ | ~~F~~ |

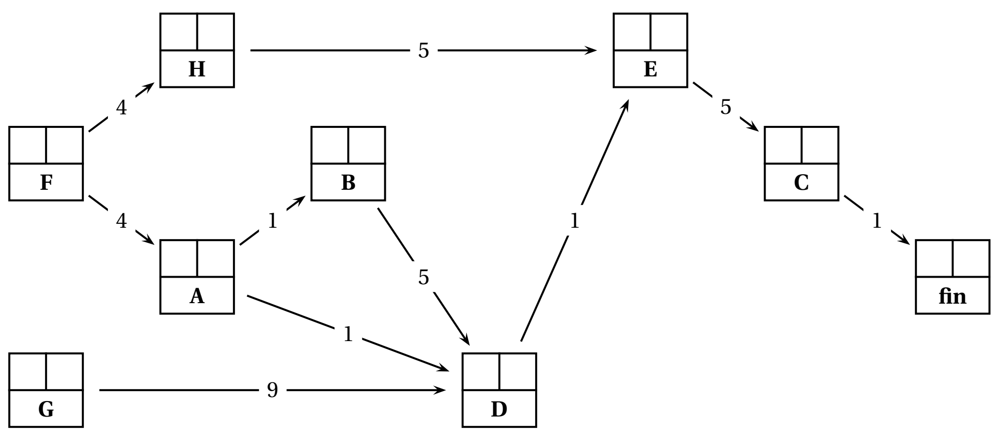
On a donc :

| Niveaux | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tâches | F – G | A – H | B | D | E | C |

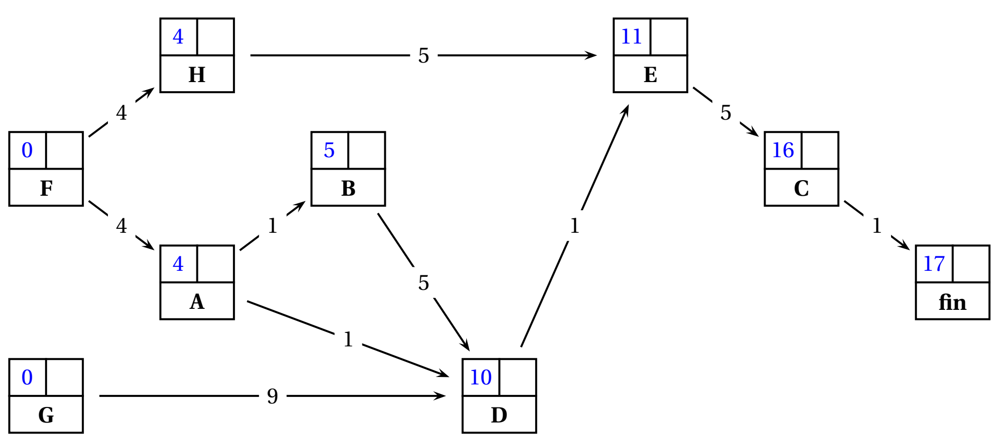
**2.** En partant du tableau des prédécesseurs, on établit le tableau des successeurs de chaque sommet.

| Tâche | Prédécesseurs | Successeurs |
|---|---|---|
| A | F | B – D |
| B | A | D |
| C | E | – |
| D | B – A – G | E |
| E | D – H | C |
| F | – | A – H |
| G | – | D |
| H | F | E |

**3.** On construit par étapes le graphe d'ordonnancement du projet (méthode M. P. M.) ; pour cela on construit le graphe par niveaux en rajoutant une tâche fictive « fin ».

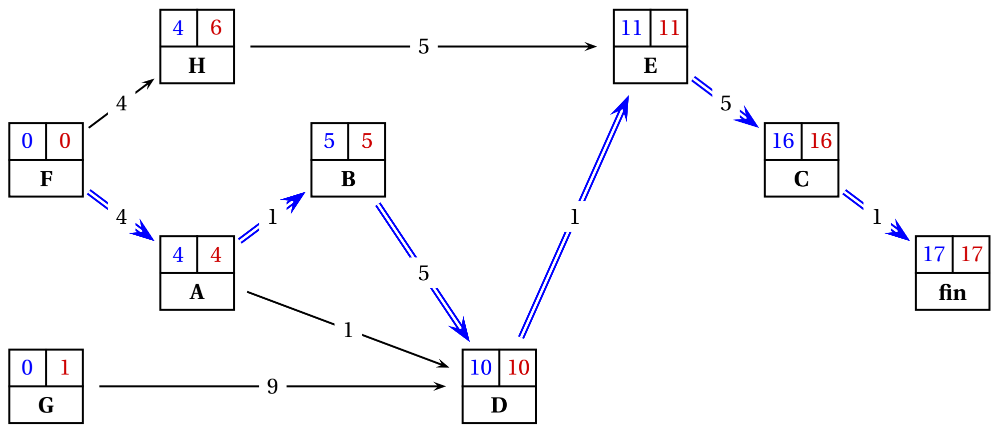



Pour déterminer pour chaque tâche la « date au plus tôt », on traite les sommets par niveaux en partant du début. Puis pour chaque sommet, on note la date qui est la longueur du plus **long** chemin depuis le début.



Ce graphe donne la durée minimale du projet qui est de 17 jours.

Pour déterminer pour chaque tâche la « date au plus tard », on traite les sommets par niveaux en partant de la fin et en marquant 17 pour le sommet « fin ». La date « au plus tard » d'une tâche s'obtient en retirant de la date au plus tard de la tâche qui lui succède sa propre durée. S'il y a plusieurs successeurs, on garde la date la plus **petite**.




**4.** La durée minimale du projet est de 17 jours.

Le chemin critique est : F $\longmapsto$ A $\longmapsto$ B $\longmapsto$ D $\longmapsto$ E $\longmapsto$ C $\longmapsto$ fin.

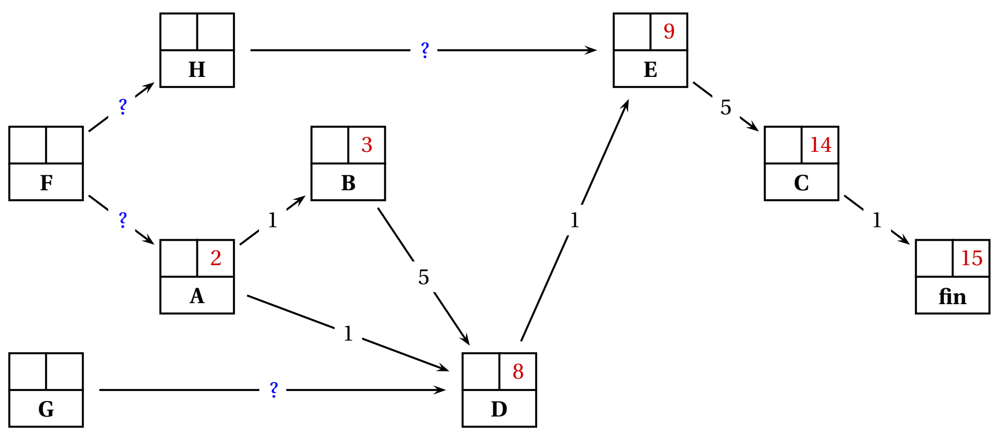
**5.** La marge totale de la tâche H est donnée par la différence entre la date au plus tard de H et la date au plus tôt de H, soit en jours : $6 - 4 = 2$.

Cela signifie que si la tâche H prend un retard de 2 jours au maximum, on pourra encore tenir le délai de 17 jours comme durée du projet.

**6.** Un célèbre animateur accepte d'assister à l'inauguration si elle a lieu 15 jours après le lancement du projet. Les tâches A, B, C, D, E ont une durée incompressible.

Comme les tâches A, B, C, D, E ont une durée incompressible, il ne reste que les tâches F, G et H qui peuvent être modifiées pour tenir un délai total de 15 jours.

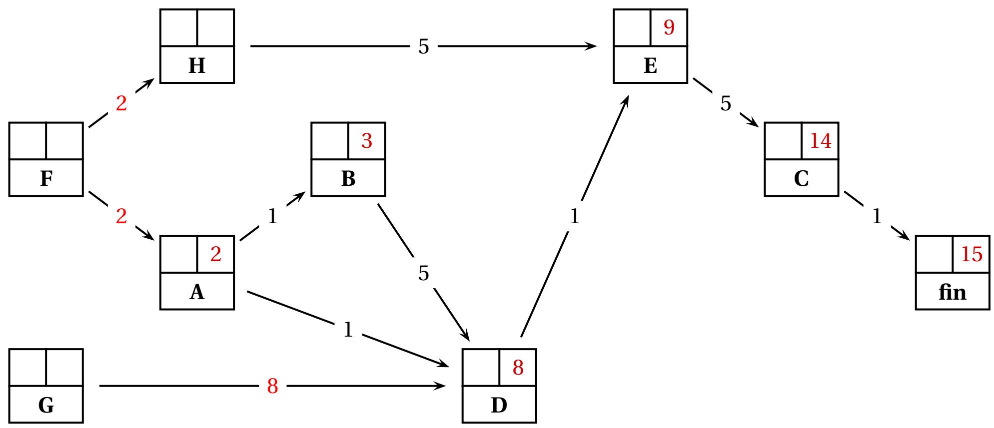
On construit un nouveau graphe d'ordonnancement en précisant la date de fin de 15 jours, les durées des tâches incompressibles, et les dates au plus tard de ces tâches.



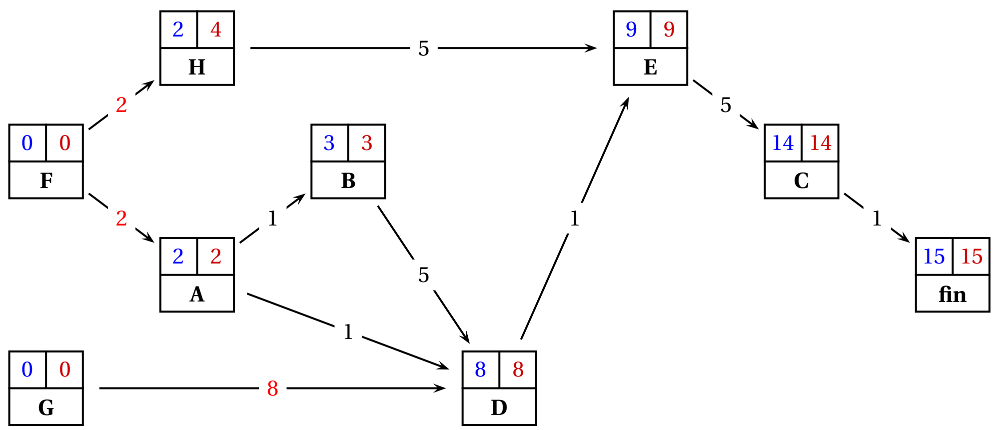
En regardant le chemin F $\longmapsto$ A, on voit que la tâche F doit être réduite à 2 jours.

En regardant le chemin G $\longmapsto$ D, on voit que la tâche G doit être réduite à 8 jours.

La tâche H peut garder la même durée de 5 jours.




On peut alors construire le nouveau graphe d'ordonnancement.




Il aura donc fallu réduire à 2 jours la tâche F, et réduire à 8 jours la tâche G.

## Exercice 2 — 9 points

### Partie A

Le jeu vidéo comprend un coffre-fort. Son ouverture dépend de trois paramètres : une clé que doit trouver le joueur, une énigme à résoudre, la durée de ces deux tâches (donnée par un chronomètre).

Le coffre s'ouvre si l'une au moins des conditions suivantes est réalisée :

- le joueur a trouvé la clé et le chronomètre marque 30 minutes ou plus, ou
- l'énigme est résolue et le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes, ou

- le joueur a trouvé la clé et l'énigme n'est pas résolue.

On définit trois variables booléennes $a$, $b$, $c$ de la manière suivante :

- $a = 1$ si le joueur a trouvé la clé, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si l'énigme est résolue, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes, $c = 0$ sinon.

**1.** On écrit une expression booléenne $E$ qui traduit les critères d'ouverture du coffre-fort.

- le joueur a trouvé la clé et le chronomètre marque 30 minutes ou plus, se note $a.\overline{c}$ ;
- ou, se note $+$ ;
- l'énigme est résolue et le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes, se note $b.c$ ;
- ou, se note $+$ ;
- le joueur a trouvé la clé et l'énigme n'est pas résolue, se note $a.\overline{b}$.

Donc $E = a.\overline{c} + b.c + a.\overline{b}$

**2.** **a.** On représente l'expression $E$ dans un tableau de Karnaugh.

$a.\overline{c}$

| $a$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | 1 | | | 1 |

$b.c$

| $a$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | 1 | |
| 1 | | | 1 | |

$a.\overline{b}$

| $a$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | |

$E = a.\overline{c} + b.c + a.\overline{b}$

| $a$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**b.** On en déduit une écriture simplifiée de l'expression booléenne $E$ sous la forme d'une somme de deux termes.

$E = a.\overline{c} + b.c + a.\overline{b}$

| $a$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $a$ |
| | | | $b.c$ | | |

Donc $E = a + b.c$.

**c.** Cette expression simplifiée s'interprète par :

- le joueur a trouvé la clé, ou
- l'énigme est résolue et le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes.

**3.** On donne une écriture simplifiée de $\overline{E}$.

On utilise les formules : $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$ et $\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$.

$\overline{E} = \overline{a+b.c} = \overline{a}.\left(\overline{b.c}\right) = \overline{a}.\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.\overline{c}$.

Le tableau de Karnaugh de $\overline{E}$ est :

| $a$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 1 | | | | |

Cette expression simplifiée s'interprète par :

- le joueur n'a pas trouvé la clé et l'énigme n'est pas résolue, ou
- le joueur n'a pas trouvé la clé et le chronomètre marque 30 minutes ou plus.

**Partie B**

Pour passer un niveau dans le jeu, il faut taper sur un clavier un code de 6 caractères comprenant des lettres et des chiffres. Le joueur peut trouver ces chiffres en résolvant trois énigmes numériques, qui sont décrites dans les questions 1, 2, 3.

**1.** Le caractère de gauche du code est le nombre de diviseurs positifs de 2019. Cette question détaille la détermination de ce nombre.

**a.** On cherche tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{673}$ qui vaut environ 25,9 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23.

Le nombre 673 n'est divisible par aucun de ces nombres donc 673 est un nombre premier.

**b.** On donne la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 2 019.

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 3 \\ 673 & 673 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2019 &=& 3\times 673 \\ 673 &=& 1\times 673 \end{array}$$

Donc : $2019 = 3 \times 673$

**c.** Les diviseurs positifs de 2019 sont les nombres qui s'écrivent $3^a \times 673^b$, où $a$ et $b$ sont des entiers égaux à 0 ou à 1.

| $a$ | $b$ | $3^a \times 673^b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 3 |
| 0 | 1 | 673 |
| 1 | 1 | 2019 |

Les diviseurs positifs de 2 019 sont donc : 1, 3, 673 et 2 019. Il y en a 4 donc le caractère de gauche du code, qui est le nombre de diviseurs positifs de 2 019 est 4.

**2.** Les 2e, 3e et 4e caractères du code en partant de la gauche sont, dans cet ordre, les chiffres de l'écriture hexadécimale du nombre 2019.

$2\,019 = 126 \times 16 + 3$ ; $126 = 7 \times 16 + 14$ ; donc $2\,019 = 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 3 \times 16^0 = \overline{7\text{E}3}^{16}$

**3.** Cette question détaille la détermination des deux derniers caractères du code, ce qui demande d'abord de résoudre l'équation $n^2 + n + 1 \equiv 0 \mod 7$.

**a.** On détermine les restes possibles de la division de $n^2 + n + 1$ par 7 en fonction des restes possibles de la division de $n$ par 7 en complétant le tableau suivant :

| Reste possible de la division de $n$ par 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste possible de la division de $n^2$ par 7 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| Reste possible de la division de $n^2 + n + 1$ par 7 | 1 | 3 | 0 | 6 | 0 | 3 | 1 |

Les restes possibles de la $n^2 + n + 1$ par 7 sont donc : 0, 1, 3 et 6.

**b.** On peut lire dans le tableau ci-dessus que les entiers de la forme $7k + 2$, avec $k$ entier naturel, sont des solutions de l'équation $n^2 + n + 1 \equiv 0 \mod 7$.

D'après le tableau, les autres solutions ont pour reste 4 dans la division par 7, ce sont donc les nombres de la forme $7k + 4$, avec $k$ entier naturel.

**c.** On cherche le nombre de solutions de l'équation $n^2 + n + 1 \equiv 0 \mod 7$ qui sont comprises entre 0 et 101.

- Solutions de la forme $7k + 2$ ; on cherche $k$ tel que $0 \leqslant 7k + 2 \leqslant 101$.

  $0 \leqslant 7k + 2 \leqslant 101 \iff -2 \leqslant 7k \leqslant 99 \iff -\dfrac{2}{9} \leqslant k \leqslant \dfrac{99}{7}$

  $\dfrac{99}{7} \approx 14{,}1$ donc $0 \leqslant k \leqslant 14$ ; il y a donc 15 solutions.
- Solutions de la forme $7k + 4$ ; on cherche $k$ tel que $0 \leqslant 7k + 4 \leqslant 101$.

  $0 \leqslant 7k + 4 \leqslant 101 \iff -4 \leqslant 7k \leqslant 97 \iff -\dfrac{4}{7} \leqslant k \leqslant \dfrac{97}{7}$

  $\dfrac{97}{7} \approx 13{,}9$ donc $0 \leqslant k \leqslant 13$ ; il y a donc 14 solutions.

Le nombre total de solutions est donc 29.

**d.** Les deux derniers caractères à droite sont, dans cet ordre, les chiffres en base dix du nombre trouvé en **c** ; c'est donc 29.

**4.** Le code à taper pour passer le niveau du jeu est :

Réponse A : 43E730 Réponse B : $\boxed{\text{47E329}}$
Réponse C : 33E729 Réponse D : 27E330

## Exercice 3 **4 points**

Pour un jeu vidéo nommé « escape game », il est prévu des abonnements pour une durée de deux ans. Lors de la mise en service du jeu, 40 personnes se sont abonnées. Les dirigeants estiment qu'à partir du jour suivant l'inauguration, le nombre de nouveaux abonnés va augmenter de 5 % chaque mois.

**1.** Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre estimé de nouveaux abonnés $n$ mois après l'ouverture. Ainsi $u_0 = 40$.

**a.** $u_0 + u_0 \times \dfrac{5}{100} = 40 + 40 \times \dfrac{5}{100} = 42$ donc $u_1 = 42$

$u_1 + u_1 \times \dfrac{5}{100} = 42 + 42 \times \dfrac{5}{100} = 44{,}1$ donc $u_2 = 44$

**b.** Ajouter 5 % c'est multiplier par $1 + \dfrac{5}{100}$ soit 1,05.

Donc pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n$, donc la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $u_0 = 40$.

On en déduit que pour tout $n$, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 40 \times 1{,}05^n$.

**2.** Pour tout entier naturel $n$, on note $S_n$ le nombre total d'abonnés $n$ mois après l'ouverture du jeu. Ainsi $S_0 = 40$.

**a.** $S_1 = u_0 + u_1 = 40 + 42 = 82$.

**b.** Pour trouver combien de mois après l'ouverture du jeu le nombre estimé d'abonnés sera supérieur à 200, on calcule quelques termes de la suite $(u_n)$ :

$40 \times 1{,}05^3 \approx 46{,}3$ donc $u_3 = 46$ et $40 \times 1{,}05^4 \approx 48{,}6$ donc $u_4 = 49$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 40 | 42 | 44 | 46 | 49 |
| $S_n$ | 40 | 82 | 126 | 172 | 221 |

Le nombre d'abonnés sera donc supérieur à 200 au bout de 4 mois.

**c.** La somme des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Donc : $S_{12} = 40 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{13}}{1 - 1{,}05} = 800\left(1{,}05^{13} - 1\right) \approx 709$

Le nombre total d'abonnés un an après l'ouverture du jeu est estimé à 709.