Corrigé du BTS Métropole 17 mai 2023
Services informatiques aux organisations
Épreuve obligatoire

Exercice 1 **5 points**

Question 1. On considère le nombre 2 023 écrit en base dix.
Son écriture en base seize est

A : E67	B 7E7	C : 6E7

$2\,023 = 7 \times 256 + 14 \times 16 + 7 = 7E7_{16}$

Réponse B

Question 2. On considère les nombres, écrits en base deux, 1010_2 et 1011_2. La somme écrite en base deux de ces nombres est égale à

A : 1111_2	B 10011_2	C : 10101_2

$1010_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 = 10$ et $1011_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 = 11$
$10 + 11 = 21 = 16 + 4 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 = 10101_2$

Réponse C

Question 3. On considère la relation binaire $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff \left(xy \leqslant 0 \wedge x \neq y\right).$$

On a

A : $(-3)\,\mathscr{R}\,3$	B $(-3)\,\mathscr{R}\,(-4)$	C : $(-3)\,\mathscr{R}\,(-3)$

On peut éliminer les réponses B et C car le produit des deux nombres est strictement positif.

Réponse A

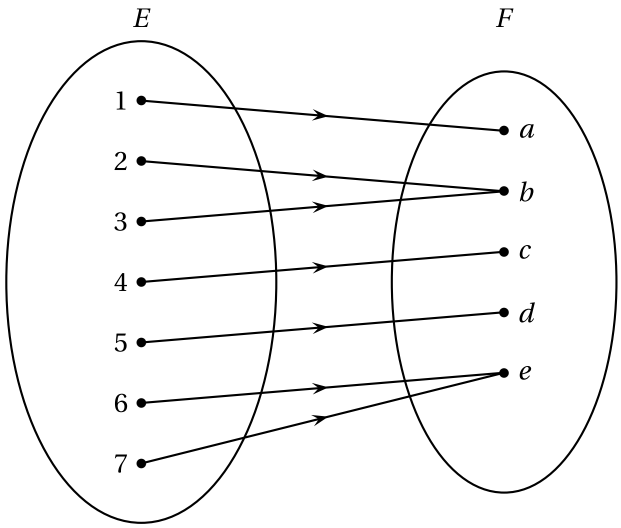
Question 4. La relation binaire $\mathscr{R}$ définie à la question 3 est

A : réflexive	B symétrique	C : transitive

$x \mathscr{R} y \iff \left(xy \leqslant 0 \wedge x \neq y\right) \iff \left(yx \leqslant 0 \wedge y \neq x\right) \iff y \mathscr{R} x$
Donc la relation $\mathscr{R}$ est symétrique.

Réponse B

Question 5. Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est définie par le diagramme ci-dessous.



L'application ainsi définie est

A : injective et non surjective	B surjective et non injective	C : bijective

On examine les propriétés :

- $f(2) = f(3) = b$ donc l'application f n'est pas injective.
- Tous les éléments de F ont au moins un antécédent par f dans E, donc l'application f est surjective.

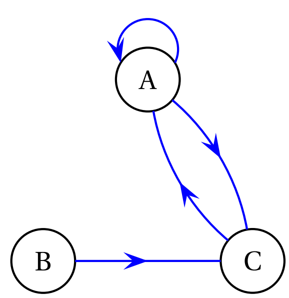
Réponse B

Exercice 2 **5 points**

Partie A

On considère le graphe orienté G comportant 3 sommets notés A, B et C dont la matrice d'adjacence est P, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On dessine une représentation du graphe G.



2. a. $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & 1+0+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

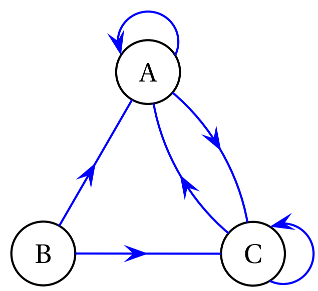
b. La matrice $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne le nombre de chemins de longueur 2 ; il n'y en a qu'un partant de B, et il va vers A : c'est le chemin B - C - A.

3. $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de fermeture transitive de ce graphe est $\widehat{P} = P \vee P^{[2]} \vee P^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

S'il y a un 1 à l'intersection de la ligne correspondant au sommet X et de la colonne correspondant au sommet Y, alors il y a un **chemin** allant du sommet X au sommet Y.

Le graphe de la fermeture transitive de G est donc :



Partie B

Dans un graphe orienté, on définit :

— le **degré entrant** d'un sommet comme étant le nombre d'arcs menant à ce sommet.

— le **degré sortant** d'un sommet comme étant le nombre d'arcs issus de ce sommet.

1. **a.** Le degré entrant du sommet C du graphe G défini dans la partie A est 2 ; c'est la somme des nombres situés sur la 3e colonne de P.

b. Le degré sortant du sommet C du graphe G défini dans la partie A est 1 : c'est la somme des nombres situés sur la 3e ligne de P.

2. On étudie dans cette question les graphes orientés à trois sommets numérotés de 1 à 3. On considère l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel où Degré_sortant désigne une fonction de paramètres M et s, M étant une matrice à 3 lignes et 3 colonnes et s un entier compris entre 1 et 3. Le coefficient de la matrice M situé ligne i colonne j est noté m_{ij}.

On complète cet algorithme pour que la fonction renvoie le degré sortant du sommet numéroté s dans un graphe dont la matrice d'adjacence est M.

Fonction Degré_sortant (M, s)
  deg $\leftarrow 0$
  Pour j allant de 1 à 3 **Faire**
    Si $m_{sj} > 0$ **Faire**
    deg $\leftarrow$ deg $+ 1$
    Fin de Si
  Fin de Pour
Retourner deg

Exercice 3 **10 points**

Une entreprise décide de mettre en place une authentification à plusieurs étapes permettant à ses employés d'accéder aux services en ligne qu'elle propose.

Partie A

La première authentification consiste à utiliser un mot de passe.
À la première connexion, l'utilisateur doit créer un mot de passe de 8 à 16 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet ou des chiffres ou des caractères spéciaux (?,&, etc.).
Pour être valide, un mot de passe doit remplir au moins l'une des trois conditions suivantes :

— il contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux;

— il contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres;

— il contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres.

1. • Le mot de passe ABCDABCD ?# contient deux caractères spéciaux mais il ne contient ni trois chiffres, ni au moins dix lettres; il n'est donc pas valide.
   • Le mot de passe STU27ABCABCDE& contient deux caractères spéciaux et onze lettres donc il est valide.

On définit les variables booléennes a, b et c de la manière suivante :

- a lorsque le mot de passe contient au moins trois chiffres, $\overline{a}$ sinon;
- b lorsque le mot de passe contient au moins deux caractères spéciaux, $\overline{b}$ sinon;
- c lorsque le mot de passe contient au moins dix lettres, $\overline{c}$ sinon.

2. **a.** On appelle E l'expression booléenne qui traduit la validité d'un mot de passe.

   - Le mot de passe « contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux » se traduit en $a.b$;
   - Le « ou » se traduit en $+$;
   - Le mot de passe « contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres » se traduit en $\overline{a}.b.c$;
   - Le « ou » se traduit en $+$;
   - Le mot de passe « contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres » se traduit en $\overline{b}.c$.

   Donc $E = a.b + \overline{a}.b.c + \overline{b}.c$.

   b. On représente l'expression E dans un tableau de Karnaugh.

$a.b$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	1

$\overline{a}.b.c$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1				

$\overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1		1		

$E = a.b + \overline{a}.b.c + \overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

On en déduit une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

$a.b$

c

Donc $E = a.b + c$.

c. L'expression simplifiée de E est « le mot de passe contient au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux, ou au moins dix lettres »

3. Le tableau de Karnaugh correspondant à $\overline{E}$ est :

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1	1			

$\overline{a}.\overline{c}$

$\overline{b}.\overline{c}$

Donc $\overline{E} = \overline{a}.\overline{c} + \overline{b}.\overline{c}$.

Partie B

Pour la seconde authentification, le serveur de l'entreprise envoie à l'utilisateur un mot de passe codé qu'il devra décoder.
Le serveur de l'entreprise code un mot de passe de la façon suivante :

— à chaque lettre de l'alphabet, on associe son rang x selon le tableau ci-dessous

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Code	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— on fixe une clé $(a\,;b)$, où a et b sont deux entiers naturels compris entre 0 et 25 ;

— on calcule le reste y de la division de $ax+b$ par 26; on détermine ainsi le plus petit entier naturel y vérifiant $y \equiv ax+b\ [26]$;

— on cherche ensuite la lettre de l'alphabet dont le rang est y;

— cette lettre code la lettre donnée au départ.

1. Le serveur de l'entreprise utilise la clé $(9\,;15)$.

a. La lettre C a pour rang $x = 2$. Donc $ax + b = 9 \times 2 + 15 = 33$ qui a pour reste $y = 7$ dans la division par 26. Le rang 7 correspond à la lettre H donc C est codée H.

b. La lettre E a pour rang $x = 4$. Donc $ax + b = 9 \times 4 + 15 = 51$ qui a pour reste $y = 25$ dans la division par 26. Le rang 25 correspond à la lettre Z donc E est codée Z.

2. L'utilisateur veut décoder la lettre V associée à l'entier $y = 21$. Pour cela il doit déterminer le plus petit entier naturel x vérifiant $21 \equiv 9x + 15\ [26]$.

a. $9 \times 3 = 27 \equiv 1\ [27]$.

b. Si $21 \equiv 9x+15\ [26]$ alors $3 \times 21 \equiv 3 \times (9x+15)\ [26]$ soit $63 \equiv 27x+45\ [26]$ qui donne $18 \equiv 27x\ [26]$ ou encore, puisque $27 \equiv 1\ [26]$, on a $18 \equiv x\ [26]$.

Donc $21 \equiv 9x + 15\ [26]$ alors $x \equiv 18\ [26]$.

c. La lettre V correspond au rang $y = 21$. On cherche x tel que $21 \equiv 9x + 15\ [26]$. D'après la question précédente, on obtient $x = 18$, qui est le rang de la lettre S.

Donc la lettre V se décode en S.