# ∽ Corrigé du BTS Groupement D ∾

# Métropole – septembre 2020

## EXERCICE 1 — 12 points

### A. Évolution de la population de poissons au fil des mois dans certains aquariums

**1.** Dans un aquarium, il y a initialement 10 poissons.
On admet que la population de poissons augmente de 30 % chaque mois.
Quel est le nombre de poissons au bout de 5 mois ? Le résultat a été arrondi à l'unité.

**a.** 12 **b.** 50 **c.** 160 **d.** 37

Ajouter 30 %, c'est multiplier par 1,3.
Le nombre de poissons au bout de 5 mois est donc de $10 \times 1,3^5 \approx 37$.

**Réponse d.**

**2.** Dans un aquarium, au temps $t = 0$, on compte 10 poissons.
On modélise le nombre de poissons présents dans l'aquarium par une fonction $g$.
On admet que la fonction $g$ est la solution de l'équation différentielle $y' + 0,3y = 0$ vérifiant la condition initiale $g(0) = 10$. Alors $g$ est définie par :

**a.** $g(t) = 10\,\mathrm{e}^{0,3t}$ **b.** $g(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0,3t}$ **c.** $g(t) = 10 + \mathrm{e}^{0,3t}$ **d.** $g(t) = 10 + \mathrm{e}^{-0,3t}$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,3y = 0$ sont les fonctions $f$ définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0,3t}$, où $k$ est un réel quelconque.
La solution $g$ qui vérifie $g(0) = 10$ est telle que $k\,\mathrm{e}^{-0,3t\times 0} = 10$ ; donc $k = 10$, et donc $g(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0,3t}$.

**Réponse b.**

### B. Étude statistique

On cherche à évaluer l'effet d'un pesticide que l'on peut trouver dans les rivières, sur la diminution de la fertilité d'une population de poissons. Pour cela un laboratoire va disposer huit aquariums, contenant chacun dix poissons de la même espèce et de l'eau avec différentes quantités de ce pesticide. Au bout d'un mois on relève le nombre total d'œufs pondus par les poissons des différents aquariums et on obtient les résultats suivants :

| Numéro de l'aquarium | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Concentration en pesticide (en mg/l) ($x_i$) | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| Nombre d' œufs pondus dans le mois ($N_i$) | 249 | 248 | 246 | 230 | 130 | 50 | 40 | 35 |

On effectue le changement de variable : $y = -\ln\left(\dfrac{250}{N} - 1\right)$.

**1.** On complète le tableau.

| Concentration en pesticide (en mg/l) $(x_i)$ | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d' œufs pondus dans le mois $(N_i)$ | 249 | 248 | 246 | 230 | 130 | 50 | 40 | 35 |
| $y_i = -\ln\left(\dfrac{250}{N_i} - 1\right)$ | 5,52 | 4,820 | 4,119 | 2,442 | 0,08 | $-1{,}386$ | $-1{,}658$ | $-1{,}815$ |

**2.** À l'aide de la calculatrice, on trouve que le coefficient de corrélation linéaire $r$ de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est égal à $-0{,}946$.

$|r| > 0{,}9$ donc on peut envisager un ajustement affine du nuage de points.

**3.** À l'aide de la calculatrice, on détermine une équation de la droite d'ajustement de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = ax + b$; on trouve : $y = -0{,}857x + 5{,}905$

**4.** On note $N(x)$ la fonction modélisant le nombre d'œufs pondus dans un aquarium en un mois, en fonction de la concentration $x$ en pesticide (en mg/l).

**a.** On utilise le changement de variables $y = -\ln\left(\dfrac{250}{N} - 1\right)$.

$y = -0{,}857x + 5{,}905$ donc

$$-\ln\left(\frac{250}{N(x)} - 1\right) = -0{,}857x + 5{,}905 \iff \ln\left(\frac{250}{N(x)} - 1\right) = 0{,}857x - 5{,}905$$
$$\iff \frac{250}{N(x)} - 1 = \mathrm{e}^{\,0{,}857x - 5{,}905}$$

**b.** $$\frac{250}{N(x)} - 1 = \mathrm{e}^{\,0{,}857x-5{,}905} \iff \frac{250}{N(x)} = 1 + \mathrm{e}^{\,0{,}857x-5{,}905} \iff \frac{N(x)}{250} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\,0{,}857x-5{,}905}}$$
$$\iff N(x) = \frac{250}{1+\mathrm{e}^{\,0{,}857x-5{,}905}}.$$

## C. Étude de la fonction

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{250}{1 + 0{,}003\,\mathrm{e}^{\,0{,}9x}}$.

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,0{,}9x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 0{,}003\,\mathrm{e}^{\,0{,}9x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{250}{1 + 0{,}003\,\mathrm{e}^{\,0{,}9x}} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**2.** **a.** Pour tout $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ :

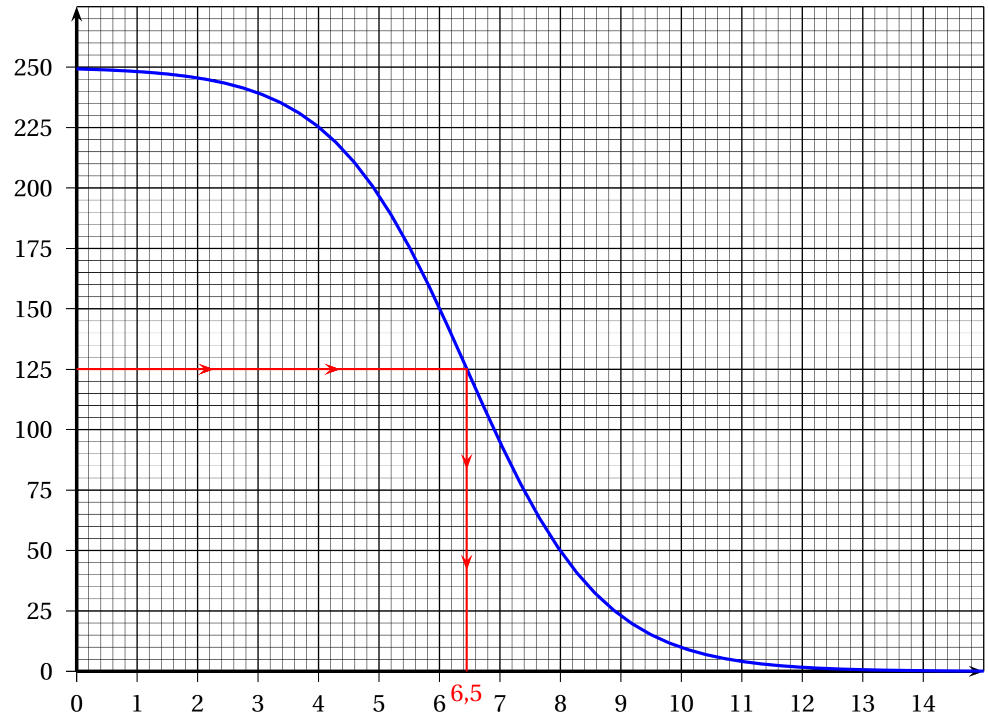
$$f'(x) = \frac{0 - 250 \times \left(0 + 0{,}003 \times 0{,}9\,\mathrm{e}^{\,0{,}9x}\right)}{\left(1 + 0{,}003\,\mathrm{e}^{\,0{,}9x}\right)^2} = \frac{-0{,}675\,\mathrm{e}^{\,0{,}9x}}{\left(1 + 0{,}003\,\mathrm{e}^{\,0{,}9x}\right)^2}.$$

**b.** Pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^{\,x} > 0$ donc $e^{0{,}9x} > 0$ et donc $f'(x) < 0$.

On en déduit que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**3.** On trace la courbe représentative de la fonction $f$.

Pour la suite, on admet que la fonction $f$ modélise le nombre d'œufs pondus par mois dans un aquarium, en fonction de la concentration $x$ en pesticide (en mg/l) sur l'intervalle $[0; 50)$.




4. La concentration efficace médiane notée CE50 est la concentration qui correspond à une diminution de 50 % du nombre d'œufs pondus par mois par rapport à une eau sans pesticide.

   Avec une eau sans pesticide, on a 249 œufs pondus. Il faut donc chercher la concentration en pesticide qui donne une production de moitié, soit 125 œufs en arrondissant à l'unité.

   Graphiquement, on trouve une concentration efficace médiane en mg/l d'environ 6,5.

   Par le calcul, on cherche $x$ pour que $f(x) = 125$ ; on résout cette équation.

   $$f(x) = 125 \iff \frac{250}{1+0{,}003\,\text{e}^{\,0{,}9x}} = 125 \iff 1+0{,}003\,\text{e}^{\,0{,}9x} = 2 \iff \text{e}^{\,0{,}9x} = \frac{1}{0{,}003}$$

   $$\iff 0{,}9x = \ln\left(\frac{1}{0{,}003}\right) \iff x = \frac{\ln\left(\frac{1}{0{,}003}\right)}{0{,}9} \text{ donc } x \approx 6{,}45.$$

5. Une primitive $F$ de $f$ est définie par $F(x) = -\dfrac{2\,500}{9}\ln\left(\text{e}^{\,-0{,}9x}+0{,}003\right)$.

   Le nombre moyen d'œufs pondus par mois, pour des concentrations en pesticide comprises entre 4 et 6 mg/l est :

   $$\begin{aligned}\frac{1}{6-4}\int_4^6 f(x)\,\text{d}x &= \frac{1}{2}\left[F(x)\right]_4^6 = \frac{1}{2}\left[F(6)-F(4)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{2\,500}{9}\ln\left(\text{e}^{\,-0{,}9\times 6}+0{,}003\right)\right)-\left(-\frac{2\,500}{9}\ln\left(\text{e}^{\,-0{,}9\times 4}+0{,}003\right)\right)\right]\end{aligned}$$

   ce qui donne 194 en arrondissant à l'unité.

## EXERCICE 2 : 8 points

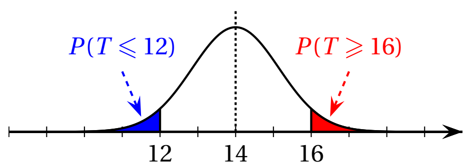
### A. Étude du taux d'hémoglobine chez la femme en France

L'anémie se définit par un taux d'hémoglobine dans le sang inférieur aux valeurs normales. Une femme est en anémie lorsque son taux d'hémoglobine est inférieur ou égal à 12 g/dl. Une femme est en polyglobulie si son taux d'hémoglobine est supérieur ou égal à 16 g/dl.

Soit $T$ la variable aléatoire qui, à chaque femme de la population française, associe son taux d'hémoglobine en grammes par décilitre (g/dl).
On admet que $T$ suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 1{,}15$.

1. La probabilité qu'une femme choisie au hasard soit en anémie est $P(T \leqslant 12) \approx 0{,}041$.
2. La probabilité qu'une femme choisie au hasard soit en polyglobulie est $P(T \geqslant 16)$.

   La courbe représentant la fonction de densité d'une loi normale de moyenne $\mu$, est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$. Comme les nombres 12 et 16 sont symétriques par rapport à la moyenne 14, les aires en bleu et en rouge sont égales.

   L'aire en bleu est égale à $P(T \leqslant 12)$, et l'aire en rouge est égale à $P(T \geqslant 16)$.
   Donc $P(T \geqslant 16) = P(T \leqslant 12)$ et donc la probabilité qu'une femme choisie au hasard soit en polyglobulie est de 0,041.

**B. Prévisions d'erreurs d'analyses**

Un laboratoire procède à 300 analyses de taux d'hémoglobine chaque mois. On suppose que la probabilité qu'une analyse soit erronée est 0,005. On note $X$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 300 analyses, associe le nombre d'analyses erronées de cet échantillon. On suppose que la constitution d'un tel échantillon peut être assimilée à un tirage avec remise de 300 analyses.

1. Pour une analyse, il y a deux issues : elle est erronée, avec une probabilité de $p = 0{,}005$, ou elle ne l'est pas.

   On suppose que la constitution d'un échantillon peut être assimilée à un tirage avec remise de 300 analyses.

   Donc la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 300 analyses, associe le nombre d'analyses erronées de cet échantillon suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}005$.
2. Un tableur fournit les résultats suivants :

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $k$ | $P(X = k)$ |
| 2 | 0 | 0,222 292 2 |
| 3 | 1 | 0,335 113 869 |
| 4 | 2 | 0,251 756 399 |
| 5 | 3 | 0,125 667 348 |
| 6 | 4 | 0,046 888 445 |
| 7 | 5 | 0,013 948 723 |
| 8 | 6 | 0,003 445 29 |
| 9 | 7 | 0,000 727 358 |
| 10 | 8 | 0,000 133 867 |
| 11 | 9 | 2, 18253E-05 |

**a.** La probabilité qu'aucune des 300 analyses de l'échantillon ne soit erronée est $P(X=0) = 0{,}2222922 \approx 0{,}22$.

**b.** $P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$
$= 0{,}251756399 + 0{,}125667348 + 0{,}046888445 = 0{,}424312792 \approx 0{,}42$

Il y a donc une probabilité de 0,42 que dans l'échantillon de 300 analyses, il y en ait entre 2 et 4 d'erronées.

**C. Délai des résultats des analyses du taux d'hémoglobine**

Un laboratoire qui pratique des analyses affirme que le délai moyen pour fournir les résultats d'une analyse du taux d'hémoglobine est de 60 minutes. On souhaite tester cette hypothèse à l'aide d'un test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

On note $m$ le délai moyen pour fournir le résultat d'une analyse et on définit les hypothèses nulle et alternative suivantes : $H_0$ « $m = 60$ » et $H_1$ « $m \neq 60$ ».

Soit $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 analyses associe le délai moyen pour fournir les résultats de ces analyses.

On admet que $\overline{Y}$ suit la loi normale d'espérance $m$ et d'écart type 1,5. Donc sous l'hypothèse « $H_0$ est vraie », $\overline{Y}$ suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart type 1,5.

1. Sous l'hypothèse $H_0$, la variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de moyenne $m = 60$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}5$. On sait qu'alors : $P(m - 2\sigma \leqslant \overline{Y} \leqslant m + 2\sigma) \approx 0{,}95$, autrement dit : $P(60 - 3 \leqslant \overline{Y} \leqslant 60 + 3) \approx 0{,}95$.

   Donc, sous l'hypothèse $H_0$, le réel positif $h$ tel que $P(60 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 60 + h) = 0{,}95$ est $h = 3$.

   Cela veut dire que : $P\left(\overline{Y} \in [57\,;\,63]\right) \approx 0{,}95$.
2. On peut énoncer la règle de décision de ce test :
   - si le délai moyen pour fournir les résultats des analyse de l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $[57\,;\,63]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
   - sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.
3. On prélève un échantillon de 100 analyses et on trouve un délai moyen pour fournir les résultats de $\overline{y} = 62{,}5$ minutes.

   $\overline{y} \in [57\,;\,63]$ donc il n'y a pas de raison, au risque de 5 %, de rejeter l'hypothèse nulle, ce qui veut dire qu'on a aucune raison, au risque de 5 %, de mettre en doute l'affirmation du laboratoire sur le délai de fourniture des résultats des analyses.