∽ Corrigé du Brevet de technicien supérieur ∾ Métropole – septembre 2020 – Groupement B

Exercice 1 — 10 points

Un jouet pour enfant prévu pour être utilisé en extérieur, est un bonhomme de neige monté sur un ressort. Le principe de fonctionnement est le suivant : on comprime le jouet au sol et une fois relâché, celui-ci est propulsé dans les airs à une certaine hauteur et retombe ensuite au sol. On suppose que le mouvement du jouet est vertical.

On souhaite étudier la hauteur atteinte par le jouet en fonction du nombre d'années d'utilisation.

On modélise la hauteur que peut atteindre le jouet par une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 3\,;$$

y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\left[0\,;+\infty\right[$;
x représente la durée d'utilisation, exprimée en années ;
y' désigne la fonction dérivée de y et y'' désigne la fonction dérivée seconde de y.

Partie A : Résolution de l'équation différentielle

1. L'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$, soit : $(r+1)^2 = 0$, qui a pour solution double : $r = -1$.

   D'après le cours, les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-x}$, où λ et μ sont deux réels quelconques.
2. Soit un nombre réel k, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction constante g telle que $g(x) = k$.

   La fonction g est solution de (E) veut dire que $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 3$.

   $g(x) = k$ donc $g'(x) = 0$ et $g''(x) = 0$; on en déduit que $k = 3$ et donc que $g(x) = 3$.
3. D'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-x} + 3$, où λ et μ sont deux réels quelconques.
4. Soit f la fonction solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions suivantes : $f(0) = 4$ et $f(2) = 5\,\mathrm{e}^{-2} + 3$.

   - $f(0) = 4 \iff (0 + \mu)\,\mathrm{e}^0 + 3 = 4 \iff \mu = 1$; donc $f(x) = (\lambda x + 1)\,\mathrm{e}^{-x} + 3$.
   - $f(2) = 5\,\mathrm{e}^{-2} + 3 \iff (\lambda \times 2 + 1)\,\mathrm{e}^{-2} + 3 = 5\,\mathrm{e}^{-2} + 3 \iff 2\lambda + 1 = 5 \iff \lambda = 2$.

   Donc $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + 3$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

La hauteur exprimée en décimètres que peut atteindre le jouet après x années d'utilisation est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + 3$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm. (Voir annexe)

1. $f(0) = (0+1)\,\mathrm{e}^0 + 3 = 4$; la hauteur que peut atteindre le jouet lors de la toute première utilisation est de 4 décimètres.

2. $f(0{,}5) = (2\times 0{,}5+1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5}+3 = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}5}+3 \approx 4{,}21$

Après 6 mois d'utilisation, soit une demi-année, la hauteur que peut atteindre le jouet est d'environ 4,21 décimètres.

3. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 3$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 3 = 3$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ en $+\infty$, d'équation $y = 3$. (Voir annexe)

c. On peut donc dire qu'à long terme, la hauteur que pourra atteindre le jouet sera de 3 décimètres.

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$f'(x) = 2\times \mathrm{e}^{-x} + (2x+1)\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 0 = (2-2x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. On détermine le signe de $f'(x)$ et le tableau des variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$\approx 4{,}21$	$\searrow$	3

5. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $F(x) = (-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} + 3x$ est une primitive de la fonction f.

L'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est :

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_0^2 = F(2) - F(0) = \left[(-2\times 2-3)\,\mathrm{e}^{-2} + 3\times 2\right] - \left[(-2\times 0-3)\,\mathrm{e}^{0} + 3\times 0\right]$$
$$= \left(6 - 7\,\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(-3\right) = 9 - 2\,\mathrm{e}^{-2}$$

Une unité d'aire vaut 4 cm^2, donc l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, est de $36 - 8\,\mathrm{e}^{-2}$ soit environ 32,22. (Voir annexe)

Exercice 2 — 10 points

Dans le cadre du développement d'un de ses prototypes, une marque a demandé à ses équipementiers de développer des technologies et des composants l'aidant à créer un véhicule prototype consommant moins de 1 L au 100 km. Un équipementier a conçu des billes en céramique plus légères pour les roulements du prototype. Ces billes doivent avoir un diamètre de 12,7 mm.

Partie A : Loi normale

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bille en céramique produite par l'équipementier, associe son diamètre exprimé en mm. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 12{,}7$ et d'écart-type σ.

1. On admet que : $P(12{,}6 \leqslant X \leqslant 12{,}8) \approx 0{,}95$.

La valeur de l'écart-type σ est :

0,05	0,1	0,15	0,2

> On sait que si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, on a :
> $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.
> Or $\mu = 12{,}7$ et on sait que $P(12{,}6 \leqslant X \leqslant 12{,}8) \approx 0{,}95$, que l'on peut écrire :
> $P(12{,}7 - 2 \times 0{,}05 \leqslant X \leqslant 12{,}7 + 2 \times 0{,}05) \approx 0{,}95$.
> En comparant les deux approximations, on peut déduire que $\sigma = 0{,}05$.

2. $P(12{,}6 \leqslant X \leqslant 12{,}8) \approx 0{,}95$ donc $P(X < 12{,}6) + P(X > 12{,}8) \approx 1 - 0{,}95$ donc $P(X < 12{,}6) + P(X > 12{,}8) \approx 0{,}05$

Pour des raisons de symétrie, $P(X < 12{,}6) = P(X > 12{,}8)$ donc la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la production de l'équipementier ait un diamètre strictement supérieur à 12,8 mm est de $\frac{1}{2} \times 0{,}05$ soit 0,03 en arrondissant au centième.

Partie B : Probabilités conditionnelles

L'équipementier propose ses billes en céramique plus légères à deux marques automobiles A et B. On choisit au hasard une bille en céramique dans la production de l'équipementier.

On admet que :

- La probabilité que la bille soit achetée par la marque A est 0,3.
- La probabilité qu'elle soit achetée par la marque B est 0,7.
- Sachant qu'elle a été achetée par la marque A, la probabilité que la bille soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est 0,75.

On note :

- L'évènement A : « La bille en céramique est achetée par la marque A ».
- L'évènement B : « La bille en céramique est achetée par la marque B ».
- L'évènement R : « la bille en céramique vendue par l'équipementier est utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype ».

1. **a.** Sachant qu'elle a été achetée par la marque A, la probabilité que la bille soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est 0,75, donc $P_A(R) = 0{,}75$.

b. $P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0{,}3 \times 0{,}75 = 0{,}225$

2. On admet que la probabilité qu'une bille en céramique vendue par l'équipementier soit utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est : $P(R) = 0{,}9$.

a. D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R)$.

On sait que $P(R) = 0{,}9$ et que $P(A \cap R) = 0{,}225$, donc $P(B \cap R) = 0{,}9 - 0{,}225 = 0{,}675$.

b. $P_B(R) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(B)} = \dfrac{0{,}675}{0{,}7} \approx 0{,}96$.

3. La probabilité qu'une bille en céramique ait été achetée par la marque A sachant qu'elle est utilisée dans le roulement d'un nouveau prototype est : $P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}225}{0{,}9} = 0{,}25$.

Partie C : Test d'hypothèse

L'équipementier veut vérifier que les billes en céramique ont un diamètre de 12,7 mm avant de les proposer à une marque et il commande un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 %. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bille céramique produite par l'équipementier, associe son diamètre exprimé en mm. La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 0{,}045$. On prélève au hasard un échantillon de 200 billes en céramique dans la production de l'équipementier. Celle-ci est suffisamment grande pour assimiler ce prélèvement à un tirage successif avec remise de 200 billes.

On rappelle que la variable aléatoire $\overline{Y}$ qui, à tout échantillon prélevé au hasard de n billes en céramique dans la production de l'équipementier, associe la moyenne des diamètres des billes, suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- L'hypothèse nulle du test est : $H_0\ :\ \mu = 12{,}7$;
- l'hypothèse alternative est : $H_1\ :\ \mu \neq 12{,}7$.

Les résultats sont arrondis au millième.

1. **a.** Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de paramètres $\mu = 12{,}7$ et d'écart-type $\overline{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}045}{\sqrt{200}}$ soit 0,003 en arrondissant au millième.

   b. La variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de paramètres $\mu = 12{,}7$ et d'écart-type $\overline{\sigma} = 0{,}003$ donc, d'après le cours, on a :
   $P(\mu - 2\overline{\sigma} \leqslant \overline{Y} \leqslant \mu + 2\overline{\sigma}) = 0{,}95$ soit $P(12{,}7 - 2 \times 0{,}003 \leqslant \overline{Y} \leqslant 12{,}7 + 2 \times 0{,}003) = 0{,}95$

   La valeur du réel h tel que, sous l'hypothèse H_0, on ait : $P(12{,}7 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 12{,}7 + h) = 0{,}95$ est donc $h = 0{,}006$.

   Autrement dit : $P\left(\overline{Y} \in \left[12{,}694\ ;\ 12{,}706\right]\right) = 0{,}95$.

2. On peut énoncer la règle de décision :
   - si la moyenne des diamètres des billes de l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $\left[12{,}694\ ;\ 12{,}706\right]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
   - sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

3. Sur un échantillon de 200 billes en céramique prélevé au hasard dans la production de l'équipementier, on a relevé un diamètre moyen de 12,71 mm.

   $12{,}71 \notin \left[12{,}694\ ;\ 12{,}706\right]$ donc l'équipementier peut remettre en cause le diamètre annoncé des billes en céramique, au risque de 5 %.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1. Partie B