Corrigé du baccalauréat STL Polynésie 14 mars 2023

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 **(Physique-Chimie et Mathématiques)** **(4 points)**

Chute verticale dans un fluide visqueux

Cet exercice propose de modéliser la chute verticale d'une bille de plomb dans une huile alimentaire.

Étude mathématique de la vitesse

On souhaite déterminer une expression de la vitesse de la chute de la bille. Les données physiques de l'expérience conduisent à résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y' = -27,7\,y + 9,81.$$

5.
- Les solutions de l'équation différentielle « sans second membre » : $y' = -27,7y$, sont les fonctions $t \longmapsto k \times \mathrm{e}^{-27,7t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
- Une solution particulière de (E) est la fonction constante $t \longmapsto \dfrac{9,81}{27,7}$.

Donc l'équation différentielle (E) a pour solutions les fonctions v définies par

$$v(t) = k \times \mathrm{e}^{-27,7t} + \frac{9,81}{27,7} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

6. $v(0) = 0 \iff k \times \mathrm{e}^0 + \dfrac{9,81}{27,7} = 0 \iff k = -\dfrac{9,81}{27,7}$

Donc l'unique solution v de l'équation différentielle (E) qui vérifie $v(0) = 0$ est définie par l'expression : $v(t) = -\dfrac{9,81}{27,7} \times \mathrm{e}^{-27,7t} + \dfrac{9,81}{27,7}$, soit $v(t) = \dfrac{9,81}{27,7} \times \left(1 - \mathrm{e}^{-27,7t}\right)$.

7. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -27,7t = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0$; donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-27,7t} = 0$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-27,7t}\right) = 1$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = \dfrac{9,81}{27,7}$.

EXERCICE 3 **(Mathématiques)** **(4 points)**

La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{0,02x} - 10000$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 0,02x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{0,02x} = +\infty$
   On en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{0,02x} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{0,02x} + x \times 0,02\mathrm{e}^{0,02x} = (0,02x+1)\,\mathrm{e}^{0,02x}$
3. Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $x \geqslant 0$ donc $0,02x + 1 > 0$.
   Pour tout réel X, $\mathrm{e}^X > 0$ donc $\mathrm{e}^{0,02x} > 0$.
   On en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, on a : $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. « Tout nombre réel x, compris entre 0 et 1 000, a une image négative par f. » est une affirmation fausse car, par exemple, $f(200) \approx 919,6 > 0$.
5. Quatre fonctions A, B, C et D sont écrites dans le même programme Python ci-dessous.

```
from math import exp

def A( ) :
    n = 0
    return n * exp(0.02 * n) – 10000

def B( ) :
    n = 0
    f = – 10000
    while f < 0 :
        n = n + 1
        f = n * exp(0.02 * n) – 10000
    return n

def C( ) :
    f = – 10000
    for n in range(0,1000) :
        f = n * exp(0.02 * n) – 10000
return f

def D( ) :
    n = 0
    f = – 10000
    if f < 0 :
        n = n + 1
        f = n * exp(0.02 * n) – 10000
return n
```

   Parmi ces quatre fonctions, celle qui permet de déterminer la plus petite valeur entière dont l'image par f est positive est la fonction `B()`.
   En effet :
   - la fonction `A()` renvoie $-10\,000$;
   - la fonction `C()` renvoie $f(1\,000)$;
   - la fonction `D()` renvoie le nombre 1.

   Remarque : en faisant tourner ce programme, on trouve $n = 197$; en effet, $f(196) \approx -121,5 < 0$ et $f(197) \approx 129,5 > 0$.