Corrigé du Brevet de technicien supérieur Conception de produits industriels – septembre 2020

Exercice 1 — 10 points

Une entreprise fabrique une pièce métallique pour la construction automobile. Pour fabriquer cette pièce métallique, il est nécessaire de chauffer le métal à haute température puis de le faire refroidir. On s'intéresse dans cette partie à la température de la pièce métallique lors de la phase de refroidissement.

On pose $t = 0$ l'instant de début de refroidissement. La pièce métallique a alors une température de 200 °C.

On décide de modéliser la température de la pièce métallique lors de la phase de refroidissement par une fonction f du temps t définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, solution de l'équation différentielle d'inconnue y : (E) : $\quad y'(t) + 0,05y(t) = 1,05$, telle que $f(0) = 200$, où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et y' est la fonction dérivée de y.

L'unité du temps t est la minute et l'unité de $f(t)$, température de la pièce, est le degré Celsius (°C).

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

(E) : $\quad y'(t) + 0,05y(t) = 1,05$, où l'inconnue y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et y' est la fonction dérivée de y.

1. Les solutions de l'équation différentielle homogène $ay'(t) + by(t) = 0$ sont les fonctions y définies par : $y(t) = k\,\text{e}^{-\frac{b}{a}t}$, avec k constante réelle, donc les solutions de l'équation différentielle $y'(t) + 0,05y(t) = 0$ sont les fonctions y définies par : $y(t) = k\,\text{e}^{-\frac{0,05}{1}t}$ soit $y(t) = k\,\text{e}^{-0,05t}$ avec k constante réelle.
2. Soit g la fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

   On a donc :

   - g solution de (E) donc $g'(t) + 0,05g(t) = 1,05$;
   - g fonction constante donc $g'(t) = 0$.

   Donc $0,05g(t) = 1,05$ et donc $g(t) = \dfrac{1,05}{0,05} = 21$.

   La fonction constante g solution de (E) est donc définie par $g(t) = 21$.
3. D'après le cours, on peut en déduire que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies par : $f(t) = k\,\text{e}^{-0,05t} + 21$ avec k constante réelle.
4. $f(0) = 200 \iff k\,\text{e}^{-0,05\times 0} + 21 = 200 \iff k = 200 - 21 \iff k = 179$

   Donc $f(t) = 179\,\text{e}^{-0,05t} + 21$.

Partie B : Étude d'une fonction

Dans cette partie, on admet que $f(t) = 179\,\text{e}^{-0,05t} + 21$ pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.

1. La température de la pièce métallique 60 minutes après sa sortie du moule est de : $f(60) = 179\,\text{e}^{-0,05\times 60} + 21 = 179\,\text{e}^{-3} + 21 \approx 29,91$ soit 30°C en arrondissant au degré.
2. **a.** $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-0,05t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 21$

   b. La température de la pièce métallique va tendre vers 21°C quand le temps t augmente indéfiniment.
3. **a.** Sur $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 179 \times (-0,05)\,\text{e}^{-0,05t} + 0 = -8,95\,\text{e}^{-0,05t}$.

   b. On établit le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\text{e}^{-0,05t}$	$+$
$f'(t) = -8,95\,\text{e}^{-0,05t}$	$-$
$f(t)$	$200 \searrow 21$

4. La pièce peut être manipulée dès que sa température est inférieure à 40 °.

   a. $200 > 40 > 21$ donc à partir d'un moment t_0, la température deviendra inférieure à 40.

t	0 $\qquad\qquad$ t_0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(t)$	$200 \searrow 40 \searrow 21$

   b. t_0 est la solution de l'équation $f(t) = 40$; on résout cette équation.

$$f(t) = 40 \iff 179\,\text{e}^{-0,05t} + 21 = 40 \iff 179\,\text{e}^{-0,05t} = 19 \iff \text{e}^{-0,05t} = \frac{19}{179}$$

$$\iff -0,05t = \ln\left(\frac{19}{179}\right) \iff t = -\frac{\ln\left(\frac{19}{179}\right)}{0,05} \iff t = -20\ln\left(\frac{19}{179}\right)$$

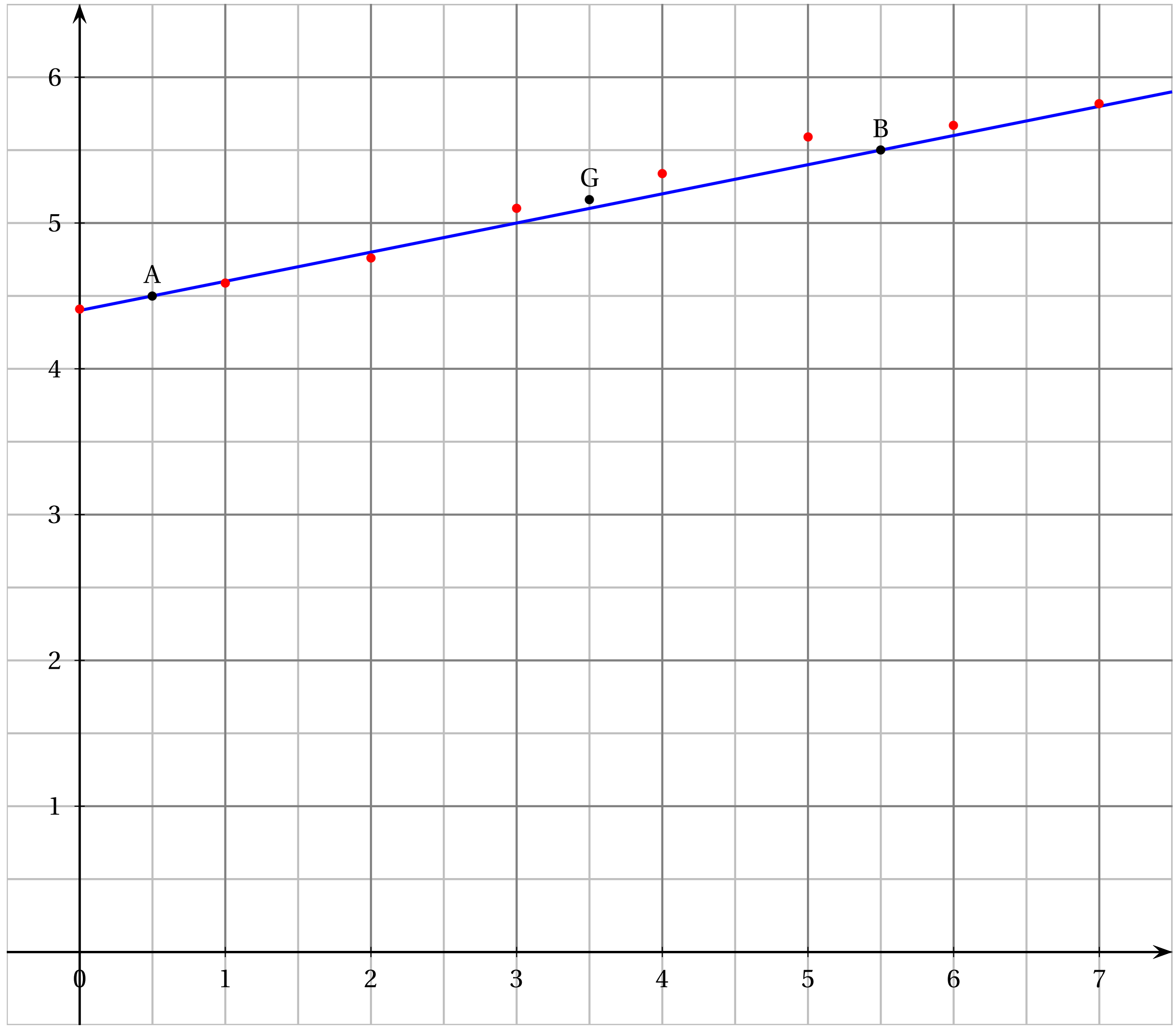
$-20\ln\left(\frac{19}{179}\right) \approx 44,86$ donc on pourra manipuler la pièce au bout de 45 minutes.

Exercice 2 — 10 points

Une entreprise produit des pièces à l'aide d'une machine-outil.

Partie A : Évolution du chiffre d'affaires

Depuis 2012, l'entreprise a développé une nouvelle démarche commerciale qui lui a permis d'améliorer son chiffre d'affaires. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :



Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires y_i en millions d'euros	4,41	4,59	4,76	5,1	5,34	5,59	5,67	5,82

1. **a.** On représente le nuage de points $\mathrm{M}_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour 1 an en abscisse, et 2 cm pour 1 million en ordonnée.

b. Les points étant à peu près alignés, on peut envisager un ajustement affine de ce nuage de points.

2. Le point moyen G a pour coordonnées :

- $x = \dfrac{0+1+2+3+4+5+6+7}{8} = \dfrac{28}{8} = 3{,}5$
- $y = \dfrac{4{,}41+4{,}59+4{,}76+5{,}1+5{,}34+5{,}59+5{,}67+5{,}82}{8} = \dfrac{41{,}28}{8} = 5{,}16$

Donc G (3,5 ; 5,16).

3. À l'aide de la calculatrice, on détermine une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis au centième : $y = 0{,}21x + 4{,}41$.

4. Pour cette question, on prendra la droite d'équation $y = 0{,}2x+4{,}4$ qui réalise un ajustement de l'évolution du chiffre d'affaire sur cette période.

a. On trace cette droite en utilisant les coordonnées des points A et B.

x	0,5	5,5
$y = 0.2x+4{,}4$	4,5	5,5
point	A	B

b. L'année 2021 correspond au rang 9.

Si cette évolution se poursuit, le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2021, au dixième de million près, peut être estimé à : $0{,}2 \times 9 + 4{,}4 = 6{,}2$.

Partie B : Pannes de la machine-outil

L'entreprise étudie régulièrement le nombre de pannes survenant sur sa machine-outil. On note X la variable aléatoire qui, à toute période de 100 jours consécutifs tirés au hasard, associe le nombre de pannes de la machine-outil. Une étude menée par l'entreprise permet d'admettre que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

1. $P(X=2) = \dfrac{4^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}15$

2. La probabilité de l'évènement : « la machine a strictement plus de 5 pannes pendant la période de 100 jours consécutifs » est $P(X>5) = 1 - P(X \leqslant 4)$.

$$\begin{aligned}P(X \leqslant 4) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\ &= \frac{4^0}{0!}\mathrm{e}^{-4} + \frac{4^1}{1!}\mathrm{e}^{-4} + \frac{4^2}{2!}\mathrm{e}^{-4} + \frac{4^3}{3!}\mathrm{e}^{-4} + \frac{4^4}{4!}\mathrm{e}^{-4} = \left(\frac{1}{1}+\frac{4}{1}+\frac{16}{2}+\frac{64}{6}+\frac{256}{24}\right)\mathrm{e}^{-4}\\ &= \left(\frac{3}{3}+\frac{12}{3}+\frac{24}{3}+\frac{32}{3}+\frac{32}{3}\right)\mathrm{e}^{-4} = \frac{103}{3}\mathrm{e}^{-4}\end{aligned}$$

$P(X>5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - \dfrac{103}{3}\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}37$

3. À la calculatrice, on trouve que $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}979$ et que $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}992$; donc le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}99$ est $n = 9$.

Cela veut dire qu'il y a plus de 99 % de chances que sur une période de 100 jours, il y ait au plus 9 pannes.

Partie C : Test de validité d'hypothèse

Parmi les pièces produites, cette entreprise fabrique des tubes métalliques. On s'intéresse à la fabrication de tubes métalliques dont la longueur doit être de 165 millimètres. On souhaite vérifier la qualité de la production concernant les dimensions de cette pièce. On propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne m des longueurs en millimètre des tubes produits.

On note Z la variable aléatoire qui à chaque tube prélevé dans la production associe sa longueur en mm. Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart type $\sigma = 0{,}6$. On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 tubes prélevé dans la production, associe la moyenne des longueurs de tube.

L'hypothèse nulle H_0 est : « $m = 165$ ». Dans ce cas la production est dite conforme pour la longueur.

Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Le test étant bilatéral, l'hypothèse alternative H_1 est « $m \neq 165$ ».
2. Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne $m' = 165$ et d'écart-type $\sigma' = 0{,}06$. On sait qu'alors : $P(m' - 2\sigma' \leqslant \overline{Z} \leqslant m' + 2\sigma') \approx 0{,}95$, autrement dit :
   $P(165 - 0{,}12 \leqslant \overline{Z} \leqslant 165 + 0{,}12) \approx 0{,}95$.

   Donc, sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que $P(165 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 165 + h) = 0{,}95$ est $h = 0{,}12$.

   Cela veut dire que : $P\left(\overline{Z} \in \left[164{,}88\ ;\ 165{,}12\right]\right) \approx 0{,}95$.

3. On peut énoncer la règle de décision :

- si la moyenne m des longueurs en millimètre des tubes produits de l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle $[164,88\,;\,165,12]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
- sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

4. On prélève un échantillon aléatoire de 100 tubes dans la production.

La moyenne des longueurs des 100 tubes de cet échantillon est 164,91mm.

$164,91 \in [164,88\,;\,165,12]$ donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle, et on peut donc juger que la qualité de la production est bonne.