

☞ Corrigé du baccalauréat S Métropole 21 juin 2011 ☞

EXERCICE 1

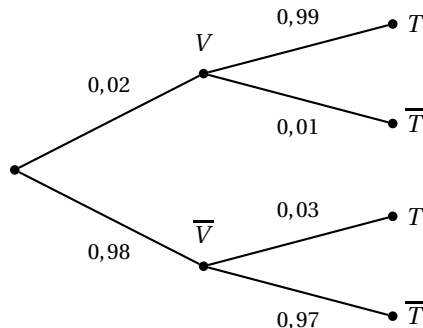
4 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. a. D'après l'énoncé, on a : $P(V) = 0,02$; $P_V(T) = 0,99$; $P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97$.

Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



- b. $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02 = 0,0198$
2. Par conséquent : $P(V) = P(V \cap T) + P(V \cap \bar{T}) = P_T(V) \times p(T) + P_{\bar{V}}(T) \times P(\bar{V})$ (formule des probabilités conditionnelles).
Alors : $P(T) = 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98 = 0,0492$.
3. a. Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024$, soit environ 40%.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.
- b. La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{(\bar{T})}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0492} \approx 0,9997$, c'est-à-dire environ 99,97 %.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,02)$.
2. Pour tout k , ($0 \leq k \leq 10$), on a $P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,02^k \times (1 - 0,02)^{10-k}$.
Alors : $P(X \geq 2) = 1 - (P(X < 2)) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - [0,98^{10} + 10 \times 0,02 \times 0,98^9]$
 $P(X \geq 2) \approx 0,0162$

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

Erreur dans l'énoncé : la question 2 a deux réponses exactes

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1. L'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1) + 1$, donc

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-1) + 1.$$

$$\text{On en déduit } z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i-1) + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) \text{ (réponse 2).}$$

2. $|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z-z_D| = |z-z_A| \Leftrightarrow DM = AM$ si M est le point d'affixe z . L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[AD]$.

Comme ABCD est de manière évidente un carré, c'est aussi la médiatrice du segment $[BC]$. (réponses 1 et 4)

3. On doit avoir $z \neq -1$.

$\frac{z+i}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+i}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$. On obtient le cercle de diamètre $[CD]$, privé de C. (réponse 2)

$$\text{Méthode analytique : } \frac{z+i}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z+1}\right) + \overline{\left(\frac{z+i}{z+1}\right)} = 0 \Rightarrow \frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+1} = 0$$

$$\Rightarrow (z+i)(\bar{z}+1) + (z+1)(\bar{z}-i) = 0 \text{ (avec } z \neq -1)$$

$$\Rightarrow 2z\bar{z} + (z+\bar{z}) - i(z-\bar{z}) = 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2) + 2x+2y = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y = 0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ (et } z \neq -1).$$

Le centre du cercle Ω a donc pour affixe $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ et le rayon vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Son diamètre a donc une longueur égale à $\sqrt{2}$ et son centre Ω est le milieu de $[CD]$ car son affixe est la demi-somme des affixes de C et de D. Mais $CD = |z_{\overline{CD}}| = |-i+1| = \sqrt{2}$, on déduit que ce cercle est celui de diamètre $[CD]$.

L'ensemble cherché est donc ce cercle auquel on enlève le point C dont l'affixe annule le dénominateur $(z+1)$.

4. $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$\arg(z-i)$ n'existe que si $z \neq i$, donc $M \neq B$.

On obtient la demi-droite $]BD]$. (réponse 3)

EXERCICE 3

7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. a. $f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty, \text{ d'où, par produit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty.$$

$$\text{D'après le cours (croissances comparées), } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.$$

- b. f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme produit et composée de fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de $1-x$, donc positif pour $x \leq 1$ et nulle pour $x = 1$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

c. On sait que $k \geq 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$, ce qui n'est pas le cas pour f_k d'après le graphique, donc $k \neq 1$, c'est-à-dire $k \geq 2$.

2. a. Pour tout $n \geq 1$, on a $f_n(0) = 0 \times e^0 = 0$ et $f_n(1) = 1^n e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par l'origine et le point de coordonnées $\left(1; \frac{1}{e}\right)$.

b. Pour tout $n \geq 1$, f_n est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n \times (-e^{-x}) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

3. $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$, qui s'annule en $x = 3$ et est du signe de $3-x$, donc positif pour $x \leq 3$ et négatif pour $x \geq 3$.

La fonction f_3 admet donc bien un maximum en 3.

4. a. L'équation de la tangente T_k est : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$, donc $y = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$ soit

$$y = \frac{(k-1)x - k + 2}{e}. \quad y = 0 \text{ pour } x = \frac{k-2}{k-1}.$$

b. On sait que T_k coupe l'axe des abscisses en $\frac{4}{5}$. On résout donc l'équation $\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5}$. On obtient $5(k-2) = 4(k-1)$, d'où $k = 6$.

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. $I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = \int_0^1 u(x)v'(x) dx$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$. Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$.

u et v sont dérivables, u' et v' sont continues. On peut effectuer une intégration par parties.

$$I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2. a. Sur $[0; 1]$, f_n est continue et positive, donc I_n représente l'aire comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, la courbe \mathcal{C}_n et l'axe des abscisses. On voit sur le graphique que ces aires semblent décroissantes, donc la suite (I_n) semble décroissante.

b. Pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \int_0^1 [x^{n+1} e^{-x} - x^n e^{-x}] dx$ (par linéarité)
 $= \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx.$

Sur $[0; 1]$, $x^n \geq 0$, $e^{-x} \geq 0$ et $x-1 \leq 0$ donc $x^n(x-1)e^{-x} \leq 0$. On intègre sur $[0; 1]$ une fonction continue négative, donc le résultat est un nombre négatif (positivité de l'intégrale).

On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$ donc la suite (I_n) est décroissante.

c. Il est évident que $I_n \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive). La suite (I_n) est donc décroissante et minorée, donc convergente vers un réel ℓ .

d. Montrons que $\ell = 0$.

Première méthode : sur $[0; 1]$, $x \mapsto -x$ est décroissante, donc par composition avec exp,

$x \mapsto e^{-x}$ est décroissante, donc $e^{-x} \leq e^0 = 1$.

Sur $[0; 1]$, $f_n(x) = x^n e^{-x} \leq x^n$, donc par propriété de l'intégration,

$$\int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème de gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Deuxième méthode : On a : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = \int_0^1 u_{n+1}(x) v'(x) dx$ avec $\begin{cases} u_{n+1}(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$

d'où $\begin{cases} u'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

u'_{n+1} et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

On obtient : $I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

On en déduit : $\frac{I_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)e} + I_n$.

Si ℓ est la limite de I_n à l'infini, par passage à la limite, on obtient : $0 = 0 + \ell$ donc $\ell = 0$

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A – Restitution organisée de connaissances

1. \vec{n} et M_0H sont colinéaires, donc :

$$\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} \right| = \left\| \vec{n} \right\| \times \left\| \overrightarrow{M_0H} \right\| = M_0H \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ car } \left\| \vec{n} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2. $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $M_0H \begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \\ z_H - z_0 \end{pmatrix}$ donc

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0)$$

$$= ax_H + by_H + cz_H - ax_0 - by_0 - cz_0 = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d \text{ car } H \in \mathcal{P}, \text{ donc}$$

$$ax_H + by_H + cz_H + d = 0.$$

3. On en déduit : $M_0H \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |-ax_0 - by_0 - cz_0 - d|$ d'où $d(M_0; \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives (4 ; 1 ; 5), (-3 ; 2 ; 0), (1 ; 3 ; 6), (-7 ; 0 ; 4).

1. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il est clair que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc les trois points A, B et C définissent un plan.

Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation $x + 2y - z - 1 = 0$ donc les trois points A, B et C appartiennent à ce plan d'équation $x + 2y - z - 1 = 0$. Comme ces trois points définissent un plan, ce plan a pour équation $x + 2y - z - 1 = 0$.

b. La distance d du point F au plan \mathcal{P} est : $\frac{|-7+2 \times 0-4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$.

2. On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .

a. $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

\vec{n} est donc un vecteur directeur de Δ .

Une représentation paramétrique de Δ est donc : $\begin{cases} x = x_F + 1 \times t \\ y = y_F + 2 \times t \\ z = z_F + (-1) \times t \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$

b. H appartient à Δ et à \mathcal{P} donc ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de Δ ainsi que l'équation de \mathcal{P} .

On doit donc avoir : $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - t \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$.

On en déduit : $-7 + t + 2(2t) - 4 + t - 1 = 0$ d'où $6t - 12 = 0$ d'où $t = 2$.

On en déduit que les coordonnées de H sont : $(-5; 4; 2)$

c. La distance $d(F; \mathcal{P})$ est égale alors à FH.

Or : $\vec{FH} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ d'où $FH = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

On retrouve le même résultat.

3. Soit \mathcal{S} la sphère de centre F et de rayon 6.

a. $\vec{FB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $FB = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ (rayon de la sphère) donc B appartient à la sphère.

b. Il est clair que le centre de la sphère est H.

Soit r le rayon de \mathcal{C} . D'après le théorème de Pythagore, on a : $r^2 + (2\sqrt{6})^2 = 6^2$ donc

$r^2 = 36 - 24 = 12$, d'où : $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

1. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

En multipliant par c , on obtient $auc + bcv = c$.

On suppose que a divise bc ; alors a divise bcv et comme a divise auc , a divise la somme $auc + bcv$, donc a divise c .

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux. Soit a relatif tel que

$a \equiv 0 [p]$ et $a \equiv 0 [q]$.

Alors, il existe k et k' relatifs tels que $a = kp$ et $a = k'q$ d'où $kp = k'q$.

p divise $k'q$ et p est premier avec q , donc, d'après le théorème de Gauss, p divise k' . Il existe $k'' \in \mathbb{Z}$, $k' = pk''$.

Alors $a = k'q = k''pq$ d'où $a \equiv 0 [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{S} des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & [17] \\ n \equiv 3 & [5] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de \mathcal{S} .

On désigne par $(u; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

a. 17 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v entiers relatifs tels que $17u + 5v = 1$.

b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.

Soit $(u; v)$ un couple solution, donc $17u + 5v = 1$. On en déduit que $17u \equiv 1 [5]$ et $5v \equiv 1 [17]$.

Alors $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v \equiv 9 \times 5v [17] \equiv 9 \times 1 [17] \equiv 9 [17]$.

De même : $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v \equiv 3 \times 17u [5] \equiv 3 \times 1 [5] \equiv 3 [5]$.

Par conséquent, $n_0 \in \mathcal{S}$.

c. Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$17 = 3 \times 5 + 2$ et $5 = 2 \times 2 + 1$, d'où $1 = 5 - 2 \times 2$

$1 = 5 - (17 - 5 \times 3) \times 2 = 17 \times (-2) + 5 \times 7$.

On peut prendre $(u; v) = (-2; 7)$.

On obtient alors $n_0 = 213$ (ce n'est évidemment pas la seule valeur!)

2. Caractérisation des éléments de \mathcal{S} .

a. Soit n un entier relatif appartenant à \mathcal{S} .

$n \equiv 9 [17]$ et $n_0 \equiv 9 [17]$ donc $n - n_0 \equiv 0 [17]$.

De même, $n \equiv 3 [5]$ et $n_0 \equiv 3 [5]$ donc $n - n_0 \equiv 0 [5]$.

17 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après la partie A, $n - n_0 \equiv 0 [85]$ (car $5 \times 17 = 85$).

b. On en déduit que, si $n \in \mathcal{S}$, $n \equiv n_0 [85]$ donc $n \equiv 213 [85]$.

Or $213 = 170 + 43 = 2 \times 85 + 43 \equiv 43 [85]$ donc $213 \equiv 43 [85]$.

Par conséquent : $n \in \mathcal{S} \iff n \equiv 43 [85]$ donc $n = 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $n \equiv 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$, il est clair que $n \equiv 9 [17]$ et $n \equiv 3 [5]$.

3. Application :

Soit n le nombre de jetons. On a : $n \equiv 9 [17]$ et $n \equiv 3 [5]$.

D'après ce qui précède, on a : $n = 43 + 85k$.

On sait que $300 \leq n \leq 400$, donc $300 \leq 43 + 85k \leq 400$. On en déduit que $k = 4$ et que Zoé a 383 jetons.