Corrigé du BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS
Nouvelle-Calédonie (obligatoire) décembre 2019

Exercice 1 **4 points**

1. **a.** Expression de $N = 0001\ 0101_2$ en base 10 :
   $N = 0001\ 0101_2 = \boxed{21_{10}}$
   b. Expression de $N = 57_{10}$ en base 2 :
   $N = 57_{10} = \boxed{0011\ 1001_2}$
   c. Nombre de valeurs possibles du nombre N :
   N est un nombre de 8 chiffres en binaire. Chaque chiffre a deux valeurs possibles (0 et 1), il y a donc 2^8 nombres possibles, c'est-à-dire 256.
2. **a.** Injectivité de l'application :
   Chaque élément de E' a au plus un antécédent dans E, donc l'application est injective.
   Surjectivité de l'application :
   Il existe des éléments de E' ($0000\ 0000_2$ par exemple) qui n'ont pas d'antécédent dans E, donc l'application n'est pas surjective.
   Bijectivité de l'application :
   Puisque l'application n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.
   b. Nombre de diodes nécessaires pour traduire 57 problèmes différents :
   On a vu à la question **1.b.** que l'écriture en base 2 de 57_{10} est $0011\ 1001_2$. Les diodes correspondant à 2^7 et 2^8 restent donc éteintes pour représenter en base 2 les entiers inférieurs à 57. Il suffit donc de 6 diodes pour traduire 57 problèmes différents.
3. **a.** Expression de $N = 43_{10}$ en base hexadécimale :
   $N = 43_{10} = \boxed{2B_{16}}$
   b. Signification dans l'écriture FF en base hexadécimale du nombre N :
   Le nombre FF en base hexadécimale correspond à $1111\ 1111_2$ donc toutes les diodes sont allumées.

Exercice 2 **8 points**

Partie A : étude du nombre de commentaires

1. Justification de l'expression de la suite (u_n) :
   D'un mois sur l'autre 80 % des commentaires donnent lieu à un autre commentaire, donc si u_n est le nombre de commentaire au moins numéro n, ils donnent lieu à $0,8 \times u_n$ au mois numéro $n+1$. Par ailleurs il y a 240 nouveaux commentaires qui viennent s'ajouter, on a donc bien :
   $u_{n+1} = 0,8u_n + 240$.
2. Calcul de u_1 :
   $u_1 = 0,8 \times u_0 + 240 = 0,8 \times 550 + 240 = 640 + 240 = \boxed{680}$.
   Interprétation du résultat :
   Il y a 640 commentaires sur le site au mois numéro 1.
   Calcul de u_2 :
   $u_2 = 0,8 \times u_1 + 240 = 0,8 \times 680 + 240 = 544 + 240 = \boxed{784}$.
   Interprétation du résultat :
   Il y a 784 commentaires sur le site au mois numéro 2.

3. Détermination de la valeur de n à partir de laquelle $u_n \geqslant 1\,000$:

On utilise l'algorithme suivant :

```
L1 U ← 550
L2 N ← 0
L3 Tant que U < 1 000
L3       U ← 1 200−650 * 0,8^(−N)
L4       N ← N + 1
L5 Fin Tant que
L6 Afficher N
```

On obtient $\boxed{n = 6}$.

4. Limite de la suite (u_n) :

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ puisque $0 < 0,8 < 1$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} -650\times 0,8^n = 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1\,200 - 650\times 0,8^n\right) = \boxed{1\,200}$.

On ne pourra donc pas dépasser 1 200 nouveaux commentaires.

Partie B

1. Critère correspondant à l'expression $\overline{b}c$:

L'expression $\overline{b}c$ correspond à « le commentaire comptabilise 100 vues ou plus et l'auteur est anonyme ».

2. Écriture simplifiée de E :

On utilise un tableau de Karnaugh :

a \ bc	00	10	11	01
0	1			1
1	1	1	1	1

$\overline{b}$

a

On a donc : $\boxed{E = a + \overline{b}}$.

Interprétation des conditions pour que le commentaire soit conservé :

Le commentaire est conservé s'il a strictement moins de 6 mois ou s'il comptabilise plus de 100 vues.

3. Conservation du commentaire datant de 6 mois ou plus et dont l'auteur est anonyme :

Un commentaire datant de 6 mois ou plus et dont l'auteur est anonyme correspond à l'expression $\overline{a}c$. Le commentaire sera donc conservé s'il comptabilise plus de 100 vues et ne sera pas conservé s'il comptabilise strictement moins de 100 vues.

4. Expression de $\overline{E}$:

$\overline{E} = \overline{a + \overline{b}} = \overline{a}\cdot\overline{\overline{b}} = \boxed{\overline{a}b}$

Condition pour qu'un commentaire soit supprimé :

D'après l'expression de $\overline{E}$, un commentaire est supprimé s'il date de 6 mois ou plus et s'il comptabilise strictement moins de 100 vues.

Exercice 3 **8 points**

Partie A

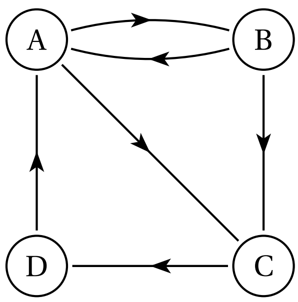
1. **a.** Décomposition en facteurs premiers de 28 :
   $\boxed{28 = 2^2 \times 7}$
   b. PGCD de 12 et 28 :
   On a $12 = 2^2 \times 3$ donc $\boxed{\text{PGCD } (12\ ;\ 28) = 4}$
   c. 15 et 28 premiers entre eux :
   On a $15 = 3 \times 5$, donc le seul diviseur commun de 15 et 28 est 1, donc 15 et 28 sont premiers entre eux.
2. Liste des numéros des 11 premiers produits mis en avant pour $a = 12$:

$0+12=12\,;\ 12=28\times 0+\mathbf{12}$	$8+12=20\,;\ 20=28\times 0+\mathbf{20}$	$16+12=28\,;\ 28=28\times 1+\mathbf{0}$
$12+12=24\,;\ 24=28\times 0+\mathbf{24}$	$20+12=32\,;\ 32=28\times 1+\mathbf{4}$	$0+12=12\,;\ 12=28\times 0+\mathbf{12}$
$24+12=36\,;\ 36=28\times 1+\mathbf{8}$	$4+12=16\,;\ 16=28\times 0+\mathbf{16}$	$12+12=24\,;\ 24=28\times 0+\mathbf{24}$

   On a donc la liste suivante : $\boxed{\{0\ ;\ 12\ ;\ 24\ ;\ 8\ ;\ 20\ ;\ 4\ ;\ 16\ ;\ 0\ ;\ 12\ ;\ 24\ ;\ 8\}}$
3. Possibilité d'afficher tous les produits avec ce choix de nombre :
   On voit que dans la liste des 11 premiers produits affichés, il n'y a pas tous les produits et que cette liste est cyclique, on n'affiche que 7 produits différents.
4. Valeurs permettant d'afficher tous les produits :
   Les valeurs 1, 17 et 25 permettent d'afficher tous les produits (car ces entiers sont premiers avec 28).

Partie B

1. Graphe représentant l'ensemble des liens :



2. Matrice d'adjacence du graphe :
   $$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$
3. Calcul de m^2 :
   $$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0+0 & 0+0+0+0 & 0+1+0+0 & 0+0+1+0 \\ 0+0+1+0 & 1+0+0+0 & 1+0+0+0 & 0+0+1+0 \\ 0+0+0+1 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 1+0+0+0 & 1+0+0+0 & 0+0+0+0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Existence de circuits de longueur 2 :

On sait que les coefficients de la matrice M^n (où M est la matrice d'adjacence du graphe) donnent le nombre de chemins de longueur n dans le graphe. Ici, donc, M^2 donne les chemins de longueur 2.

Un circuit est un chemin dont les deux extrémités sont identiques, ils correspondent donc aux coefficients de la diagonale. Donc, pour connaître le nombre de circuits de longueur 2, on fait la somme de ces coefficients.

On a donc 2 circuits de longueur 2 dans le graphe.

Circuits de longueur 2 dans le graphe :

Les deux circuits sont : $\boxed{\text{A-B-A}}$ et $\boxed{\text{B-A-B}}$.

4. Existence d'un chemin de longueur 2 entre les sommets A et D :

Pour savoir s'il existe une chemin entre le sommet A et le sommet D, c'est-à-dire entre les pages A et D on regarde le coefficient de la 1[e] ligne et 4[e] colonne. C'est 1, donc il existe un chemin de longueur 2 entre la page A et la page D.

Ce chemin est A-C-D.

5. Calcul de M^3 :

$$\boxed{M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Existence de chemins de longueur 3 de B vers A :

D'après la matrice M^3, il existe deux chemins de longueur 3 de B vers A.

Chemins de longueur 3 de B vers A :

Les deux chemins de longueur 3 de B vers A sont : $\boxed{\text{B-A-B-A}}$ et $\boxed{\text{B-C-D-A}}$.

6. Matrice de fermeture transitive $\widehat{M}$ du graphe :

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= M^{[1]} + M^{[2]} + M^{[3]} + M^{[4]} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$