∽ Baccalauréat STL Biotechnologies ∾

Nouvelle-Calédonie – 8 septembre 2023

EXERCICE 1 commun à tous les candidats **2 points**

(physique-chimie et mathématiques)

Étude mathématique de la concentration

Par la suite, on note C la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ modélisant la concentration de peroxodisulfate $C(t)$ (exprimée en mol$\cdot$ L^{-1}) en fonction du temps t (exprimé en seconde). Pour une évolution de la concentration donnée par une relation d'ordre 1, les données physiques de l'expérience conduisent à résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y' = -0{,}0085y.$$

6. Déterminons la fonction C, solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $C(0) = 0{,}0042$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$ où λ est une constante quelconque.
$a = 0{,}0085$ par conséquent sur $[0~;~+\infty[$ $C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-0{,}0085t}$ où λ est une constante quelconque.
Déterminons λ sachant que $C(0) = 0{,}0042$

$$\begin{aligned} C(0) = \lambda\,\mathrm{e}^{-0{,}0085t} &= 0{,}0042\\ \lambda\,\mathrm{e}^{-0{,}0085\times 0} &= 0{,}0042\\ \lambda\,\mathrm{e}^{0} &= 0{,}0042\\ \lambda &= 0{,}0042 \end{aligned}$$

La fonction C est la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $C(t) = 0{,}0042\,\mathrm{e}^{-0{,}0085t}$

7. Résolvons l'équation

$$C(t) = 0{,}00021$$

$$\begin{aligned} 0{,}0042\,\mathrm{e}^{-0{,}0085t} &= 0{,}00021\\ \mathrm{e}^{-0{,}0085t} &= \frac{0{,}00021}{0{,}0042}\\ \mathrm{e}^{-0{,}0085t} &= \frac{1}{20}\\ -0{,}0085t &= -\ln(20)\\ t &= \frac{\ln(20)}{0{,}0085}\\ t &= \frac{10000\times\ln(20)}{85} \end{aligned}$$

$t \approx 352{,}439$
Une valeur approchée à la seconde près de la durée nécessaire pour que la concentration résiduelle en peroxodisulfate, correspondant à une oxydation de 95 % du réactif limitant, soit égale à 0,000 21 mol.L^{-1} est 352 s .

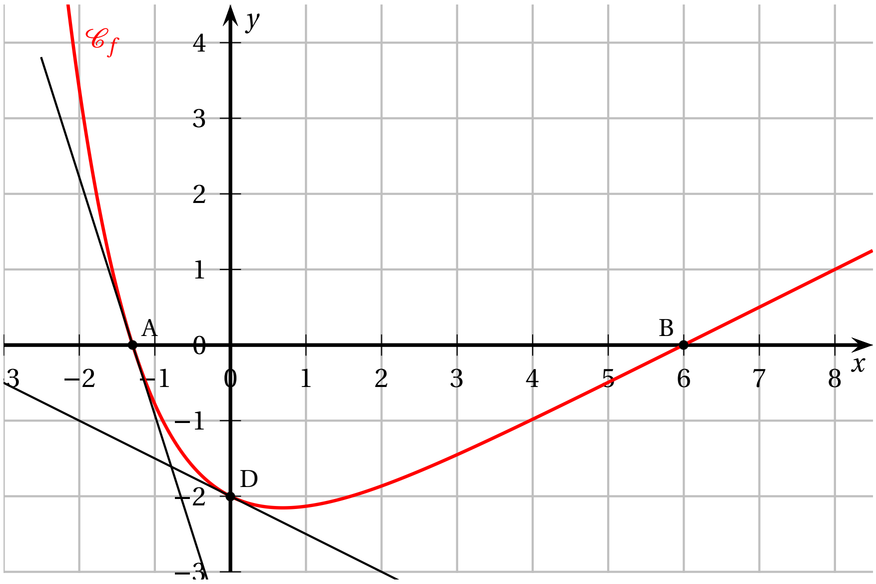
EXERCICE 3 **4 points**

Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x} + 0,5x - 3$$

dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormé du plan ci-dessous.



Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont nommés A et B.
L'abscisse de A est négative et celle de B est positive.
Le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées est nommé D.
Les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A et D sont représentées.

1. Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} + \lim_{x\to+\infty} 0,5x - 3 = 0 + (+\infty) = +\infty.$$

2. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
Déterminons $f'(0)$ par lecture graphique.
Prenons deux points appartenant à cette droite et calculons son coefficient directeur
Par exemple $M\,(-2\,;\,-1)$ et $N\,(2\,;\,-3)$ le coefficient directeur de (MN) est :

$$\frac{-3+1}{2+2} = -\frac{1}{2} \text{ d'où } f'(0) = -\frac{1}{2}$$

.

3. Calculons $f'(x)$

$$f'(x) = -\text{e}^{-x} + 0,5$$

et vérifions par le calcul le résultat obtenu à la question 2

$$f'(0) = -\text{e}^{0} + 0,5 = -1 + 0,5 = -0,5.$$

Nous obtenons bien le même résultat.

4. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Étudions le signe de $f'(x)$. Pour cela résolvons $-\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{2}>0$

$$\begin{aligned}
-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}&>0\\
-\mathrm{e}^{-x}&>-\frac{1}{2}\\
\mathrm{e}^{-x}&<\frac{1}{2}\\
-x&<-\ln 2\\
x&>\ln 2
\end{aligned}$$

Si pour tout $x\in I$, $f'(x)<0$ alors f est strictement décroissante sur I.
Sur $]-\infty\,;\,\ln 2[$, $f'(x)<0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x\in I$, $f'(x)>0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Sur $]\ln 2\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\ln 2-5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 2)=\mathrm{e}^{-\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}-3=-\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}-3=\frac{\ln 2-5}{2}\approx -2{,}15$

5. On considère le programme Python suivant :

```
from math import exp
def abscisse():
    x = -1.5
    while exp(-x) + 0.5 * x - 3 > 0:
        x = x + 0.01
    return x
```

L'exécution de l'instruction `abscisse()` renvoie la valeur $-1{,}29$ à 10^{-2} près.
Cette valeur dans le contexte de l'exercice est l'abscisse de A.

6. Reproduisons et modifions le programme Python précédent pour que l'exécution de l'instruction `abscisse()` renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de l'abscisse du point B.
En rouge, les modifications.

```
from math import exp
def abscisse():
    x = 5.5
    while exp(-x) + 0.5 * x - 3 < 0:
        x = x + 0.01
    return x
```