Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle-Calédonie 5 mars 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. a. D'après l'énoncé la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f_2'(x) = \mathrm{e}^x - 2$.

Or $\mathrm{e}^x - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$. Donc :

Donc $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff x > \ln 2$: la fonction f est décroissante sur $[-\infty~;~\ln 2[$.

$\mathrm{e}^x - 2 < 0 \iff x < \ln 2$: la fonction f est croissante sur $[\ln 2~;~+\infty[$.

$f_2(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - 2 \times \ln 2 = 2 - 2\ln 2$ est le minimum de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$2 - 2\ln 2$	$\nearrow$	

b. Comme $2 - 2\ln 2 \approx 0,614 > 0$, le minimum de la fonction f_2 étant supérieur à zéro, on en déduit que la fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit

$\mathrm{e}^x - 2x > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2x$ donc la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de la droite Δ_2.

Γ et Δ_2 n'ont pas de point commun.

2. $f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax$

a. • limite en plus l'infini :

$f_a(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a = +\infty$, donc par produit des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$.

• limite en moins l'infini :

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$.

b. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et

$f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$.

$\mathrm{e}^x - a = 0 \iff \mathrm{e}^x = a \iff x = \ln a$ (car $a > 0$).

On a le même tableau de variations que pour f_2 en remplaçant 2 par a.

c. La fonction f_a décroissante, puis croissante admet donc un minimum $f_a(\ln a) = a - a\ln a$.

d. $a - a\ln a = 0 \iff a(1 - \ln a) = 0 \iff 1 - \ln a = 0$ (car $a \neq 0$) $\iff 1 = \ln a \iff \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{\ln a} \iff \mathrm{e} = a$.

On a donc :

- $a - a\ln a > 0 \iff a < \mathrm{e}$: le minimum est positif, donc comme à la question 1, la fonction f_a est strictement positive et la courbe et la droite n'ont pas de point commun.
- $a - a\ln a < 0 \iff a > \mathrm{e}$: le minimum est inférieur à zéro.

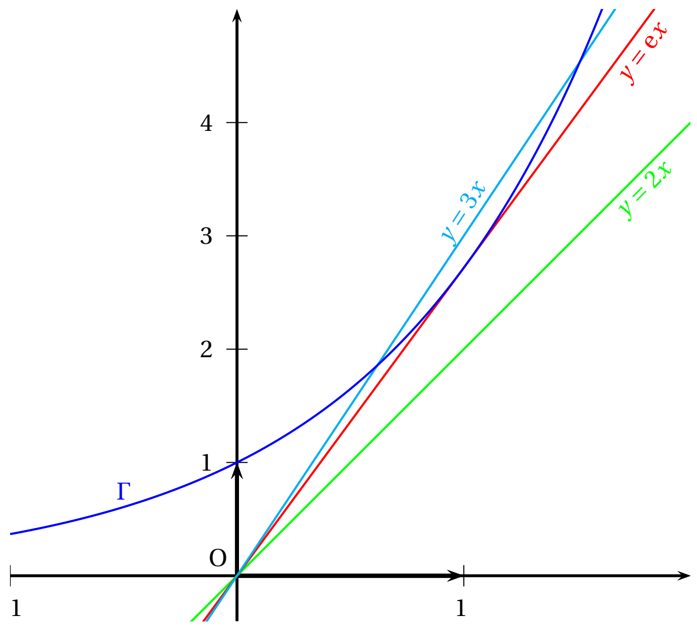
x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$a - a\ln a$	$\nearrow$	

Donc sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln a[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur positive à une valeur négative : il existe donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire un réel $\alpha \in]-\infty\,;\,\ln a[$ tel que $f_a(\alpha) = 0$, soit $\mathrm{e}^{\alpha} = a\alpha$.

De même sur $]\ln a\,;\,+\infty[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur négative à une valeur positive : il existe donc un réel $\beta \in]\ln a\,;\,+\infty[$ tel que $f_a(\beta) = 0$, soit $\mathrm{e}^{\beta} = a\beta$.

Conclusion : si $a > \mathrm{e}$ la courbe Γ et la droite Δ_a ont deux points communs.

- $a - a\ln a = 0 \iff a = \mathrm{e}$, la fonction $f_a = f_{\mathrm{e}}$ s'annule une seule fois en $x = 1$, donc $f_{\mathrm{e}}(1) = 0$: Γ et Δ_{e} ont un seul point commun (la droite est tangente à la courbe)



EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** 2% des puces livrées ont une durée de vie courte, c'est-à-dire $P_L(C) = 0,02$.

   b. On déduit que $P_L\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,02 = 0,98$ et

   $P\left(L \cap \overline{C}\right) = P(L) \times P_L\left(\overline{C}\right) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$.

   c. Comme seules les puces livrées peuvent avoir une durée de vie courte on a :

   $P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] = P\left(\overline{L}\right) + P(L \cap C) = 0,05 + 0,019 = 0,069$.

2. **a.** On sait que $P(X \leqslant 1000) = 0,02$.

   X suit une loi exponentielle de paramètre λ, donc :

   $P(X \leqslant 1000) = 1 - \mathrm{e}^{-1000\lambda} = 0,02 \iff \mathrm{e}^{-1000\lambda} = 1 - 0,02 \iff$

   $\mathrm{e}^{-1000\lambda} = 0,98 \Rightarrow -1000\lambda = \ln 0,98 \iff \lambda = \dfrac{-\ln 0,98}{1\,000}$.

b. $P(X \geqslant 10000) = \mathrm{e}^{-10000\lambda} = \mathrm{e}^{10\ln 0,98} \approx 0,817$.

Donc environ 81,7 % des puces ont une durée de vie supérieure ou égale à 10 000 heures.

c. $P(20000 \leqslant X \leqslant 30000) = \mathrm{e}^{-20000\lambda} - \mathrm{e}^{-30000\lambda} \approx 0,122$.

Soit : environ 12,2 % des puces ont une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures.

3. a. On effectue 15 000 tirages indépendants les uns des autres. La probabilité qu'une puce livrée ait une vie courte est $p = 0,003$.

Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15000$ et $p = 0,003$..

b. $\mathrm{E}(Y) = n \times p = 15000 \times 0,003 = 45$.

Il y a environ 45 puces à durée de vie courte sur les 15 000 extraites de la production.

c. On a $P(40 \leqslant Y \leqslant 50) = P(Y \leqslant 50) - P(Y < 40) = P(Y \leqslant 50) - P(Y \leqslant 39)$.

La calculatrice donne $P(Y \leqslant 50) \approx 0,7966$ et $P(Y \leqslant 39) \approx 0,2080$, donc :

$P(40 \leqslant Y \leqslant 50) \approx 0,7966 - 0,2080 \approx 0,589$.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats3

1. a. Une représentation paramétrique de D_1 s'obtient en traduisant l'égalité $\overrightarrow{A_1M} = t\overrightarrow{u_1}$ avec $t \in \mathbb{R}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-0 & = & t \\ y-2 & = & 2t \\ z-(-1) & = & 3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. D_2 a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+k \\ y & = & 0-2k \\ z & = & 2+0k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}.$$

On reconnait qu'un vecteur directeur de D_2 est $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c. $A_2 \in D_2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} -1 & = & 1+k \\ 4 & = & 0-2k \\ 2 & = & 2+0k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -2 & = & k \\ -2 & = & k \\ 2 & = & 2 \end{array}\right.$ qui a une solution $k = -2$.

Le point A_2 appartient à D_2.

2. Les vecteurs directeurs de D_1 et de D_2 ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes s'il existe des réels t et k tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ 2+2t & = & 0-2k \\ -1+3t & = & 2+0k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ 2+2+2k & = & 0-2k \\ -1+3+3k & = & 2+0k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ 4k & = & -4 \\ 3k & = & 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ k & = & -1 \\ k & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution donc il n'existe pas de point commun aux deux droites, elles ne sont donc pas coplanaires.

3. Les droites D_1 et Δ_1 contiennent le point A_1. Pour montrer qu'elles sont perpendiculaires il suffit de montrer que deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux :

$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v} = -6 - 6 + 12 = 0$.

Conclusion : les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

4. Les droites D_2 et Δ_2 sont aussi perpendiculaires

a. $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P_1 s'il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires et non nuls de ce plan soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$; or

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = -6 - 6 + 12 = 0$

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 17 \times (-6) - 22 \times (-3) + 4 \times 9 = -102 + 66 + 36 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan P_1. Il est par conséquent normal à ce plan.

b. Si P_1 et P_2 sont parallèles $\overrightarrow{n}$ vecteur normal au plan P_1 est aussi un vecteur normal au plan P_2 ; il est donc orthogonal à tout vecteur non nul du plan P_2 comme u_2 et $\overrightarrow{v}$.

On a bien $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, mais $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_2} = 17 + 44 + 0 = 61 \neq 0$.

Donc $\overrightarrow{n}$ n'est pas normal au plan P_2 et les deux plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Δ est parallèle à Δ_1 et Δ_2 lesquelles sont respectivement perpendiculaire à D_1 et D_2.

Par conséquent la droite Δ est orthogonale aux droites D_1 et D_2.

Or cette droite appartient au plan P_1 et au plan P_2. Elle est donc perpendiculaire aux droites D_1 et D_2.

Il existe donc une droite de l'espace perpendiculaire à la droite D_1 et à D_2 : c'est la droite Δ.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_1 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3} \quad v_1 = 1 + \sqrt{3} \times 0 = 1$;

$u_2 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 = 3 - 1 = 2 \quad v_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

2. a.

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
$3 - \sqrt{3}$	$6 - \sqrt{3}$	2

Les valeurs trouvées pour $N = 2$ ne correspondent pas à celles de u_2 et v_2.

L'algorithme n'affiche donc pas les valeurs de u_N et v_N.

Une version modifiée de l' algorithme est par exemple :

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier S est un nombre réel T est un nombre réel U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S Affecter 0 à T Affecter 0 à K

Traitement :	Tant que $K < N$
	    Affecter S à U
	    Affecter $\sqrt{3}U - T$ à S
	    Affecter $U + \sqrt{3}T$ à T
	    Affecter $K + 1$ à K
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher S Afficher T

3. a. $z_{n+1} = u_{n+1} + \mathrm{i}v_{n+1} = \sqrt{3}u_n - v_n + \mathrm{i}\left(u_n + \sqrt{3}v_n\right) = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)u_n + \left(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)v_n$.

Or

$az_n = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\left(u_n + \mathrm{i}v_n\right) = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)u_n + \left(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1\right)v_n = z_{n+1}$.

b. a pour module $|a| = \sqrt{3 + 1} = 2$.

D'où $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

c. Le **a.** montre que la suite (z_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $z_0 = u_0 = 1$.

Par conséquent $z_n = a^n$ pour tout entier naturel n.

Puis $z_n = 2^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Enfin en prenant la partie réelle et la partie imaginaire :

$u_n = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$ et $v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$.