

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers ∞
10 juin 2015

A. P. M. E. P.

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

1. La probabilité qu'un cadenas soit défectueux est $p = 0,03$. La taille de l'échantillon est $n = 500$.

On a $n = 500 \geq 30$, $np = 15 \geq 5$ et $n(1 - p) = 485 \geq 5$.

Les conditions sont alors vérifiées pour appliquer la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I_{500} = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$
$$= \left[0,03 - 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} ; 0,03 + 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} \right], \text{ soit environ}$$

$$\boxed{[0,015 ; 0,045]}.$$

La fréquence observée de cadenas défectueux est

$$f = \frac{19}{500} = \frac{38}{1000} = \boxed{0,038 \in I_{500}}.$$

Ce contrôle ne remet donc pas en cause, au risque de 95 %, l'affirmation du fournisseur.

2. La fréquence de cadenas défectueux est $f = \frac{39}{500} = \frac{78}{1000} = \boxed{0,078}$. La taille de l'échantillon est $n = 500$.

On a $n = 500 \geq 30$, $nf = 39$ et $n(1 - f) = 461 \geq 5$.

Les conditions sont réunies pour appliquer la formule donnant l'intervalle de confiance au seuil de 95 %.

$$I'_{500} = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}} ; 0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx \boxed{[0,033 ; 0,123]}.$$

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être

modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. $P(725 \leq X \leq 775) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \boxed{68,3\%}$, soit 0,683 (d'après le cours).

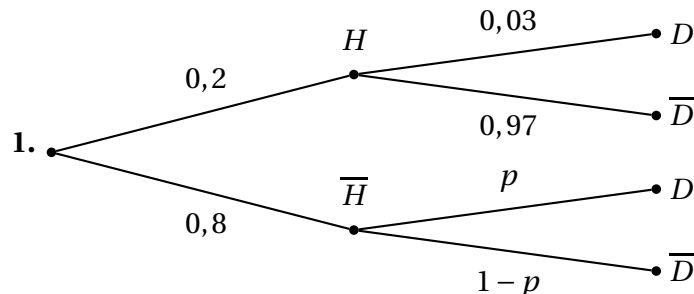
On peut aussi effectuer le calcul à la calculatrice.

2. On cherche donc le plus petit entier n tel que $P(X \geq n) < 0,05$.

Cela équivaut à $1 - P(X < n) < 0,05 \iff P(X < n) > 0,95$.

À la calculatrice, on cherche le nombre réel α vérifiant $P(X \leq \alpha) = 0,95$: n est le plus petit entier supérieur ou égal à α ; on en déduit $\boxed{n = 792}$.

Partie C



2. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P_H(D) \times P(H) + P_{\bar{H}}(D) \times P(\bar{H}) = 0,2 \times 0,03 + 0,8p = \boxed{0,006 + 0,8p}.$$

Or, $P(D) = 0,07$. On en déduit que $0,006 + 0,8p = 0,07$ donc $p = \frac{0,07 - 0,006}{0,8}$

$$= \frac{0,064}{0,8} = \frac{64}{800} = \frac{8}{100} = \boxed{0,08}.$$

$0,08 \in [0,033 ; 0,123]$, donc ce résultat est cohérent avec le résultat de la question A-2.

3. $P_{\bar{D}}(H) = \frac{P(H \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \frac{0,194}{0,93} \approx \boxed{0,209}$.

Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 :

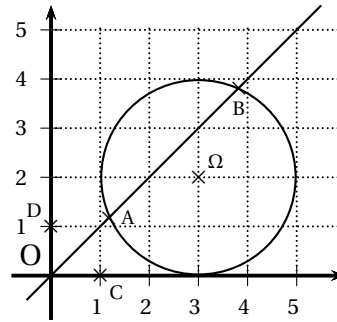
Notons C et D les points d'affixes respectives 1 et i. Alors : $|z - 1| = |z - i| \iff |z_M - z_C| = |z_M - z_D|$
 $\iff MC = MD.$

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |z - i|$ est donc la médiatrice de [CD], c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Notons Ω le point de coordonnées (3 ; 2) qui a donc pour fixe $3 + 2i$.

$|z - 3 - 2i| \leq 2. \iff |z_M - z_\Omega| \leq 2 \iff M\Omega \leq 2.$ S est donc bien le segment [AB]

L'ensemble S est le segment [AB]. **VRAI**



2. Affirmation 2 : Soit $a = \sqrt{3} + i$.

$$|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{Alors } a = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{On en déduit que } (\sqrt{3} + i)^{1515} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{1515} = 2^{1515} e^{i\frac{1515\pi}{6}} = 2^{1515} e^{i\frac{505\pi}{2}}.$$

$$\text{Or } \frac{505\pi}{2} = \frac{4 \times 126 + 1}{2} \pi = 126 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{On en déduit que } a^{1515} = 2^{1515} e^{i(126 \times 2\pi + \frac{\pi}{2})} = 2^{1515} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{1515} i \notin \mathbb{R}. \text{ FAUX}$$

3. Affirmation 3 : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. est la représentation paramétrique d'une

droite.

Pour $t = 1$, on obtient les coordonnées de E et pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient les coordonnées de F.

E et F appartiennent à cette droite, donc cette droite est bien la droite (EF). **VRAI**

4. Affirmation 4 : On a E(2 ; 1 ; -3), F(1 ; -1 ; 2) et G(-1 ; 3 ; 1).

Les coordonnées des vecteurs \vec{EF} et \vec{EG} ont pour coordonnées :

$$\vec{EF} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{EG} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors : } \vec{EF} \cdot \vec{EG} = -1 \times (-3) + (-2) \times 2 + 5 \times 2 = 3 - 4 + 20 = 19.$$

$$EF = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30}; EG = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

On a alors :

$$\vec{EF} \cdot \vec{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG}) \text{ donc } \cos(\widehat{FEG}) = \frac{\vec{EF} \cdot \vec{EG}}{EF \times EG} = \frac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{870}}.$$

À la calculatrice, on trouve $\widehat{FEG} \approx 49,89^\circ \approx 50^\circ$. **VRAI**

Exercice 3

7 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

a) g est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = (2(e^x)^2 - e^x - 1) = 2X^2 - X - 1$ en posant $X = e^x$.

$2X^2 - X - 1$ a pour racines 1 et $-\frac{1}{2}$ donc $2X^2 - X - 1 = 2(X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right) = (X-1)(2X+1)$.

On en déduit : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

b) Pour tout x réel, $e^x > 0$ donc $2e^x + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(e^x - 1)$.
 $e^{x-1} = 0$ pour $x = 0$ et $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$.

On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$			

g a donc pour minimum 0, atteint pour $x = 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (e^{2u_n} - e^{u_n}) - u_n = g(u_n) \geq 0$ puisque le minimum de g est 0.

On en déduit que la suite (u_n) est **croissante**.

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.

— **Initialisation** : $u_0 = a \leq 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n \leq 0$.

On a : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leq 0$ donc $e^{u_n} \leq 1$ d'où $e^{u_n} - 1 \leq 0$.

Comme $e^{u_n} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} \leq 0$.

La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n .

b) La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 0, donc convergente vers un réel $\ell \leq 0$.

c) On suppose que $a = 0$. Le premier terme de la suite vaut 0. La suite est croissante et majorée par 0, donc tous les termes de la suite valent 0 et la suite **converge vers 0**.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Comme $u_n \geq a > 0$, tous les termes de la suite sont positifs. D'après les variations de g sur $[0; +\infty[$, on a $g(u_n) \geq g(a)$ donc $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

— **Initialisation** : Pour $n = 0$, $a + n \times g(a) = a + 0 \times g(a) = a$; or $u_n \geq a$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. La propriété est initialisée.

— **Hérédité** : on suppose que, pour un entier n quelconque, $u_n \geq a + n \times g(a)$.

$$\text{Alors : } u_{n+1} - u_n = g(u_n) \iff u_{n+1} = u_n + g(u_n)$$

$$\geq (a + n \times g(a)) + g(u_n) \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence).}$$

Or $u_n \geq a > 0$ donc $g(u_n) \geq g(a)$ puisque la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\text{Par conséquent } \geq (a + n \times g(a)) + g(u_n) \geq a + n \times g(a) + g(a) \\ = a + (n + 1)g(a).$$

La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n , donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq a + n \times g(a)$.

c) $a > 0$ donc $g(a) > g(0) = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème des gendarmes.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

D'après la question précédente, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

a) La partie à compléter de l'algorithme est :

Tant que $u \leq M$

u prend la valeur $e^u (e^u - 1)$

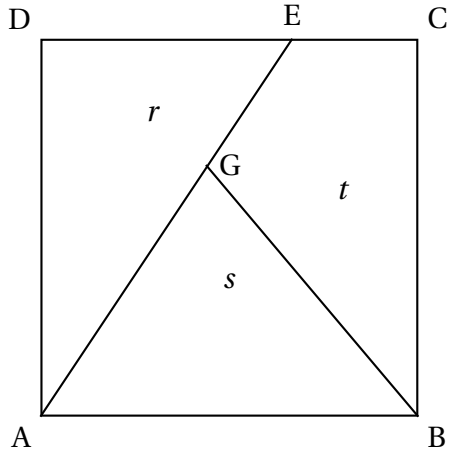
n prend la valeur $n + 1$

Fin Tant que

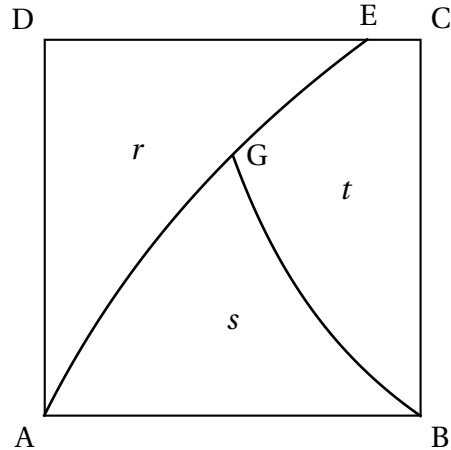
b) Pour $M = 60$, on trouve $n = 36$

Exercice 4**5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales :
 $r = s = t = \frac{1}{3}$.

L'aire du triangle ADE est $\mathcal{A}(ADE) = \frac{AD \times DE}{2} = \frac{1 \times DE}{2}$. Comme cette aire vaut $\frac{1}{3}$, on obtient $DE = \frac{2}{3}$.

Le point E a pour coordonnées : $E\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

Appelons H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle AGB.

L'aire du triangle AGB vaut : $\mathcal{A}(AGB) = \frac{AB \times GH}{2} = \frac{GH}{2}$. Comme cette aire vaut $\frac{1}{3}$, on obtient $GH = \frac{2}{3}$.

>l'ordonnée de G vaut $y_G = \frac{2}{3}$.

L'équation de la droite (AE) est $y = \frac{3}{2}x$ puisque la droite passe par l'origine et que, pour $x = x_E = \frac{2}{3}$, on trouve $y = y_E = 1$.

L'abscisse de G x_G vérifie donc $\frac{3}{2}x_G = \frac{2}{3}$ donc $x_G = \frac{4}{9}$ Le point G a donc pour coor-

données : $G\left(\frac{4}{9}; \frac{2}{3}\right)$

Partie B : étude de la proposition B

1. a) $f(x_E) = 1 \iff \ln(2x_E + 1) = 1 \iff 2x_E + 1 = e \iff x_E = \frac{e-1}{2}$.

b) G appartient à la courbe \mathcal{C}_f donc $y_G = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) = \ln 2$.

On doit alors avoir $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$, c'est-à-dire $k \times \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \ln 2 \iff$

$k = \ln 2$ donc $f(x) = \ln 2 \left(\frac{1-x}{x}\right)$

2. a) Soit $F : x \mapsto F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x$ pour $x \geq 0$.

$F'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + (x+0,5) \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) + \frac{2x+1}{2x+1} - 1$

$= \ln(2x+1) + 1 - 1 = \boxed{\ln(2x+1) = f(x)}$.

F est bien une primitive de f .

b) r est l'aire du domaine compris entre les courbes représentatives de la fonction $x \mapsto 1$, de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{e-1}{2}$.

Ainsi : $r = \int_0^{\frac{e-1}{2}} (1-f(x)) dx = \frac{e-1}{2} - \int_0^{\frac{e-1}{2}} f(x) dx = \frac{e-1}{2} - \left[F\left(\frac{e-1}{2}\right) - F(0)\right]$.

$F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{e}{2} \times \ln e - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e}{2} - 1}$

$F(0) = 0$

On en déduit : $r = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e}{2} - 1}$

3. $g(x) = \ln 2 \left(\frac{1-x}{x}\right) = \ln 2 \left(\frac{1}{x} - 1\right)$ donc une primitive G de g est définie par

$\boxed{G(x) = \ln 2(\ln x - x)}$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que

$s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}$.

$\boxed{r \approx 0,359}$ et $\boxed{s \approx 0,327}$. On en déduit $t = 1 - (r + s) \approx \boxed{0,314}$.

La proposition B vérifie donc les conditions imposées par le fabriquant.

Exercice 4**5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité****Partie A : généralités**

1. Soit $(x; y; z)$ un TP et soit p un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } x^2 + y^2 &= z^2. \text{ Alors } (px)^2 + (py)^2 = p^2 x^2 + p^2 y^2 = p^2 (x^2 + y^2) \\ &= p^2 z^2 = (pz)^2 \text{ donc } (px; py; pz) \text{ est aussi un TP.} \end{aligned}$$

2. On suppose que $(x; y; z)$ est un TP donc $x^2 + y^2 = z^2$.

Supposons les trois entiers impairs. Alors $x \equiv 1 [2]$, $y \equiv 1 [2]$ et $z \equiv 1 [2]$.

On a $x^2 \equiv 1 [2]$, $y^2 \equiv 1 [2]$ et $z^2 \equiv 1 [2]$, d'où $x^2 + y^2 \equiv 0 [2]$ donc on n'aurait pas $x^2 + y^2 = z^2$.

Les trois entiers ne peuvent pas être tous impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :

$n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.

a) $192 = 2^6 \times 3$.

b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.

$$2x^2 = 2 \times (2^\alpha \times k)^2 = 2 \times 2^{2\alpha} \times k^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$$

$$z^2 = (2^\beta \times m)^2 = 2^{2\beta} \times m^2$$

c) Si $2x^2 = z^2$, alors $2^{2\alpha+1} \times k^2 = 2^{2\beta} \times m^2$ donc $2\alpha + 1 = 2\beta$ (unicité de la décomposition).

C'est impossible puisque $2\alpha + 1$ est impair et 2β est pair.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $2015 = 5 \times 13 \times 31$;

On connaît le TP $(3; 4; 5)$ donc $(13 \times 31 \times 3; 13 \times 31 \times 4; 13 \times 31 \times 5)$ est aussi un TP, donc $(1209; 1612; 2015)$ est aussi un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2.$$

$$2015 = 2 \times 1007 + 1.$$

Ainsi, d'après la remarque faite ci-dessus, le triplet

$$(2015; 2 \times 1007^2 + 2 \times 1007; 2 \times 1007^2 + 2 \times 1007 + 1) =$$

$$(2015; 2030112; 2030113) \text{ est un TP.}$$

3. a) On cherche x et z entiers tels que $z^2 - x^2 = 403^2$, c'est-à-dire

$$(z-x)(z+x) = 169 \times 961.$$

$$\text{Résolvons le système } \begin{cases} z-x = 169 \\ z+x = 961 \end{cases}$$

En additionnant et en soustrayant, on trouve $z = 565$ et $x = 396$.

b) Le triplet (396; 403; 565) est un TP donc $(5 \times 396 ; 5 \times 403 ; 5 \times 565)$ est également un TP.

Par conséquent (1980 ; 2015 ; 2825) est un TP.