Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Névez).

- Voici la solution de Pierre Renfer.

Il existe deux entiers naturels n et m tel que : $\begin{cases} n \leq b < n+1 < n+2 < 2b \leq n+3 \\ m \leq 2b < m+1 < m+2 < b^2 \leq m+3 \end{cases}$

Puisque $\begin{cases} 2b > n+2 \\ -b > -m-1 \end{cases}$ on a $b > 1$ et de $\begin{cases} 2b \leq n+3 \\ -b \leq -n \end{cases}$ on tire $b \leq 3$.

De même, les inégalités entre b et m donnent les conditions nécessaires $\begin{cases} b^2 - 2b > 1 \\ b^2 - 2b \leq 3 \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} b^2 - 2b - 1 > 0 \\ b^2 - 2b - 3 \leq 0 \end{cases}$.

De ces dernières on déduit alors que $1+\sqrt{2} < b \leq 3$. (1)

Examinons les conditions suffisantes :

1) Si $1+\sqrt{2} < b \leq \sqrt{6}$, alors $\begin{cases} 2+2\sqrt{2} < 2b \leq 2\sqrt{6} \\ 3+2\sqrt{2} < b^2 \leq 6 \end{cases}$.

Deux entiers sont strictement compris entre b et $2b$, à savoir 3 et 4.
Mais un seul entier est strictement compris entre $2b$ et b^2, à savoir 5.

---

(1) On remarquera que cette double inégalité rend finalement non nécessaire l'inégalité $1 < b \leq 3$ obtenue précédemment. Pour autant, mon sentiment est qu'il était naturel de la chercher et loin d'être inutile.

2) Si $\sqrt{6} < b \leq \frac{5}{2}$., alors $\begin{cases} 2\sqrt{6} < 2b < 5 \\ 6 < b^2 < \frac{25}{4} \end{cases}$.

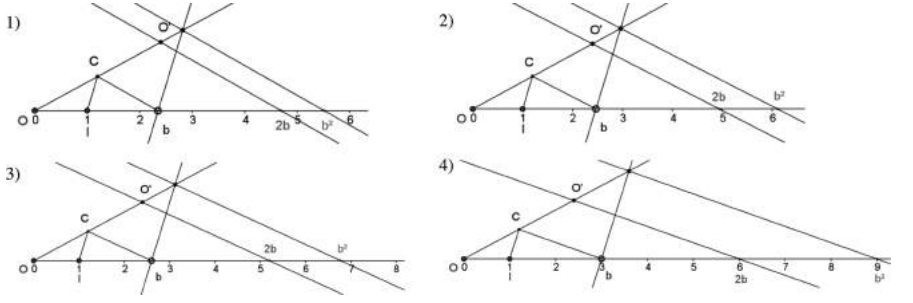
Deux entiers sont strictement compris entre b et $2b$, à savoir 3 et 4.
Et deux entiers également sont strictement compris entre $2b$ et b^2, à savoir 5 et 6.

3) Si $\frac{5}{2} < b < 3$, alors $5 < 2b < 6$.

Trois entiers sont strictement compris entre b et $2b$, à savoir 3, 4 et 5.

4) Si $b = 3$, alors $\begin{cases} 2b = 6 \\ b^2 = 9 \end{cases}$.

Deux entiers sont strictement compris entre 3 et 6, à savoir 4 et 5.
Deux entiers sont strictement compris entre 6 et 9, à savoir 7 et 8.

Finalement l'ensemble des solutions est $S = \left]6\,;\frac{5}{2}\right[\cup \{3\}$.

- Je vous propose ci-dessous une découverte visuelle de la solution, qui utilise les constructions des nombres $2b$ et b^2 à la façon de Descartes, alliées aux possibilités offertes par un logiciel de géométrie dynamique. Cette construction permet particulièrement de mettre en évidence les nombres $\sqrt{6}$ et $\frac{5}{2}$ qui apparaissent selon la position de b^2 et $2b$.