Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Michel Lafond (Dijon), Jérémy Possamaï (Clermont-Ferrand).

- Voici la solution de Jérémy Possamaï.

Cherchons une relation de récurrence entre les polynômes P_k. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
P_{k+1}(X) &= (X-1)^{k+1} \times \prod_{j=0}^{k-1}\left(X^{2^j}+1\right)^{k-j} \\
&= (X-1)(X+1)^{k+1}\left(X^{2^j}+1\right)\prod_{j=0}^{k-2}\left(X^{2^j}+1\right)^{k-j} \\
&= (X-1)(X+1)^{k+1}\left(X^{2^j}+1\right)\prod_{j=0}^{k-2}\left(X^{2^j}+1\right)\times\prod_{j=0}^{k-2}\left(X^{2^j}+1\right)^{k-1-j} \\
&= \underbrace{(X-1)\prod_{j=0}^{k-1}\left(X^{2^j}+1\right)}_{Q_k(X)}\times P_k(X)
\end{aligned}$$

Montrons, par récurrence sur k, que $Q_k(X) = X^{2^j} - 1$..

On a $Q_1(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1 = X^{2^1} - 1$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$. et supposons le résultat montré au rang k. On a alors
On a

$$Q_{k+1}(X) = (X-1)\prod_{j=0}^{k}\left(X^{2^j}+1\right) = Q_k(X)\left(X^{2^k}+1\right) = \left(X^{2^k}-1\right)\left(X^{2^k}+1\right) = X^{2^{k+1}} - 1,$$

ce qui termine la récurrence.

Montrons enfin, toujours par récurrence sur k, que $\deg(P_k) = 2^k - 1$ et que tous les coefficients de P_k sont égaux à +1 ou –1.
On vérifie trivialement la propriété pour P_1.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. et supposons la propriété montrée au rang k.
On sait que $P_{k+1}(X) = \left(X^{2^k} - 1\right)P_k(X)$. Ainsi $\deg(P_{k+1}) = 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$..

De plus :

- $P_k(X)$est la somme des monômes de degrés 0 à $2^k - 1$ avec des coefficients égaux à +1 ou –1 (hypothèse de récurrence) ;
- $X^{2^k} \times P_k(X) - P_k(X)$ est la somme des monômes de degrés 2^k à $2^{k+1} - 1$ avec des coefficients égaux à +1 ou –1.

On en déduit que $P_{k+1}(X) = X^{2^k} \times P_k(X) - P_k(X)$ a bien tous ses coefficients égaux à +1 ou –1, ce qui termine la récurrence.