Durée : 3 heures

Baccalauréat ES candidats ayant repassé l'épreuve 28 juin 2017

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées; une seule de ces réponses convient. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 1$ alors $P(X \leqslant 2,5)$ a pour valeur approchée arrondie au centième :

   a. 0,16 **b.** 0,26 **c.** 0,31 **d.** 0,54

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type σ. Si $P(-5 \leqslant Y \leqslant 5) \approx 0,95$ alors, parmi les réponses suivantes, la meilleure valeur approchée de σ est :

   a. 5 **b.** 2,5 **c.** 1,3 **d.** 0,95

3. Un institut de sondage réalise une enquête afin de mesurer le degré de satisfaction du service après-vente d'une société. Une première étude portant sur un échantillon aléatoire de 500 clients révèle que l'on dénombre 438 clients satisfaits. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant d'estimer la proportion de clients satisfaits est :

   a. $[0,079~;~0,169]$ **b.** $[0,455~;~0,545]$ **c.** $[0,831~;~0,921]$ **d.** $[0,874~;~0,878]$

4. Cet institut souhaite réduire l'amplitude de l'intervalle de confiance. Combien de personnes au minimum faut-il interroger pour que cet intervalle de confiance ait une amplitude d'au plus 0,05 ?

   a. 1 600 **b.** 40 **c.** 2000 **d.** 400

   Remarque : l'amplitude d'un intervalle $[e~;~f]$ est le nombre $f - e$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

En 2016, un institut de sondage mène une enquête régionale sur la manière dont les particuliers paient leur assurance. Les assurés se répartissent en deux catégories distinctes :

- la catégorie A, composée des assurés qui paient en agence;
- la catégorie B, composée des assurés qui paient en ligne.

En 2016, 92 % des assurés paient en agence.
On admet que, d'une année à l'autre, 4 % des assurés de la catégorie A passent à la catégorie B et que 1 % des assurés de la catégorie B passent à la catégorie A.
On suppose que le nombre d'assurés est constant et que chaque année un assuré fait partie d'une seule catégorie.
Pour tout entier naturel n, on considère l'année $(2016+n)$ et on note :

- a_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie A cette année-là,
- b_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie B cette année-là,
- P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,08 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
On notera A l'état « l'assuré est de catégorie A » et B l'état « l'assuré est de catégorie B ».

2. On admet que la matrice de transition M associée à cette situation est $M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer P_1 en fonction de M et de P_0.

b. En déduire la probabilité qu'un assuré soit de catégorie A en 2017. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état stable du graphe.

a. Justifier que $\left\{\begin{array}{rcl} -0,04a+0,01b & = & 0 \\ a+\quad b & = & 1 \end{array}\right.$.

b. Résoudre le système précédent. Quelle conclusion peut-on tirer quant à la répartition à long terme des assurés ?

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $a_n = 0,2 + 0,72 \times 0,95^n$ et que la suite (a_n) est décroissante.

b. On souhaite déterminer au bout de combien d'années moins d'un assuré sur deux sera de catégorie A. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

Variables :	A est un nombre réel N est un entier naturel
Initialisation	Affecter à A la valeur 0,92 Affecter à N la valeur 0
Traitement	Tant que .... Affecter à N la valeur .... Affecter à A la valeur .... Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

c. La proportion d'assurés de catégorie A va-t-elle devenir inférieure à 0,5 ? Si oui, à partir de quelle année ? Expliquer la démarche choisie.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale).
On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas;
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'évènement : « l'angine du malade est bactérienne »;
- T l'évènement : « le test effectué sur le malade est positif ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de E sachant que F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.

2. **a.** Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif?

b. Montrer que la probabilité que le test soit positif est $0,22$.

c. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne?

3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine.

On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X?

b. Calculer la probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

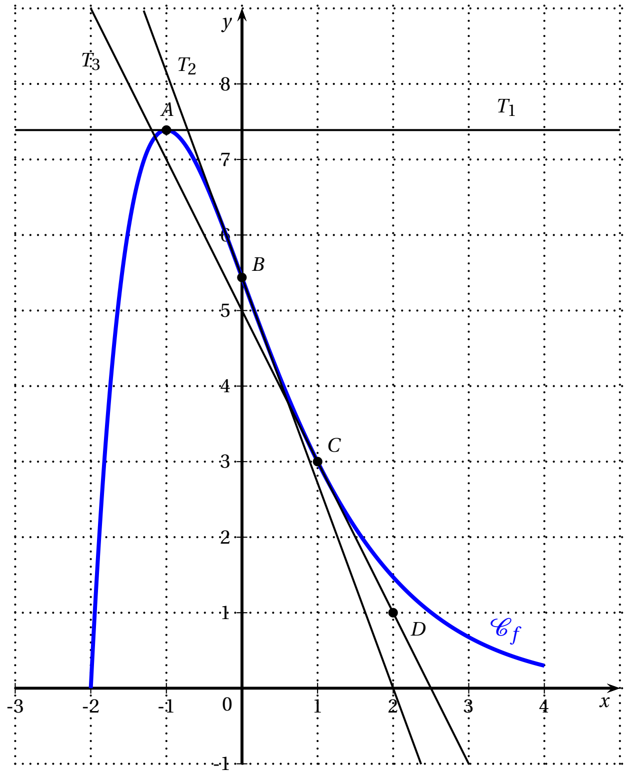
Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ ainsi que plusieurs tangentes à $\mathscr{C}_f$:

- T_1 est la tangente au point A de coordonnées $\left(-1 ; \text{e}^2\right)$,
- T_2 est la tangente au point B de coordonnées $(0 ; 2\text{e})$,
- T_3 est la tangente au point C de coordonnées $(1 ; 3)$.

On sait que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente T_3 passe par le point D de coordonnées $(2 ; 1)$.



1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. On admet que B est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. Quelle interprétation graphique peut-on faire ?
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C.

PARTIE B

On admet que la fonction f de la partie A est définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2;4]$, par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x+1}$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2 ; 4]$, on a $f'(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x+1}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

PARTIE C

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver $\left[-(x+1)*\exp(-x+1)\right]$
	$x*\exp(-x+1)$
2	intégrer $\left((x+2)*\exp(-x+1)\right)$
	$-(x+3)*\exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

2. a. Montrer que $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -4 + \mathrm{e}^{3}$.

b. En déduire la valeur moyenne arrondie au millième de la fonction f sur l'intervalle $[-2~;~1]$.