

Graphes au primaire et au collège

Journée de la régionale

APMEP Nice – Corse

Le 4 février 2015

Atelier animé par

Henry BERTRAND



Une définition simple d'un graphe

- Un graphe est un ensemble fini d'éléments mis en relation entre eux.
- Géométriquement on représente ces éléments par des points (dits sommets) reliés entre eux par des arcs de courbe (dits arêtes) qui sont souvent des segments.
- Le graphe est dit orienté si on oriente les arêtes.
- Le graphe est dit pondéré si on attribue des poids aux arêtes (dits coût de passage).

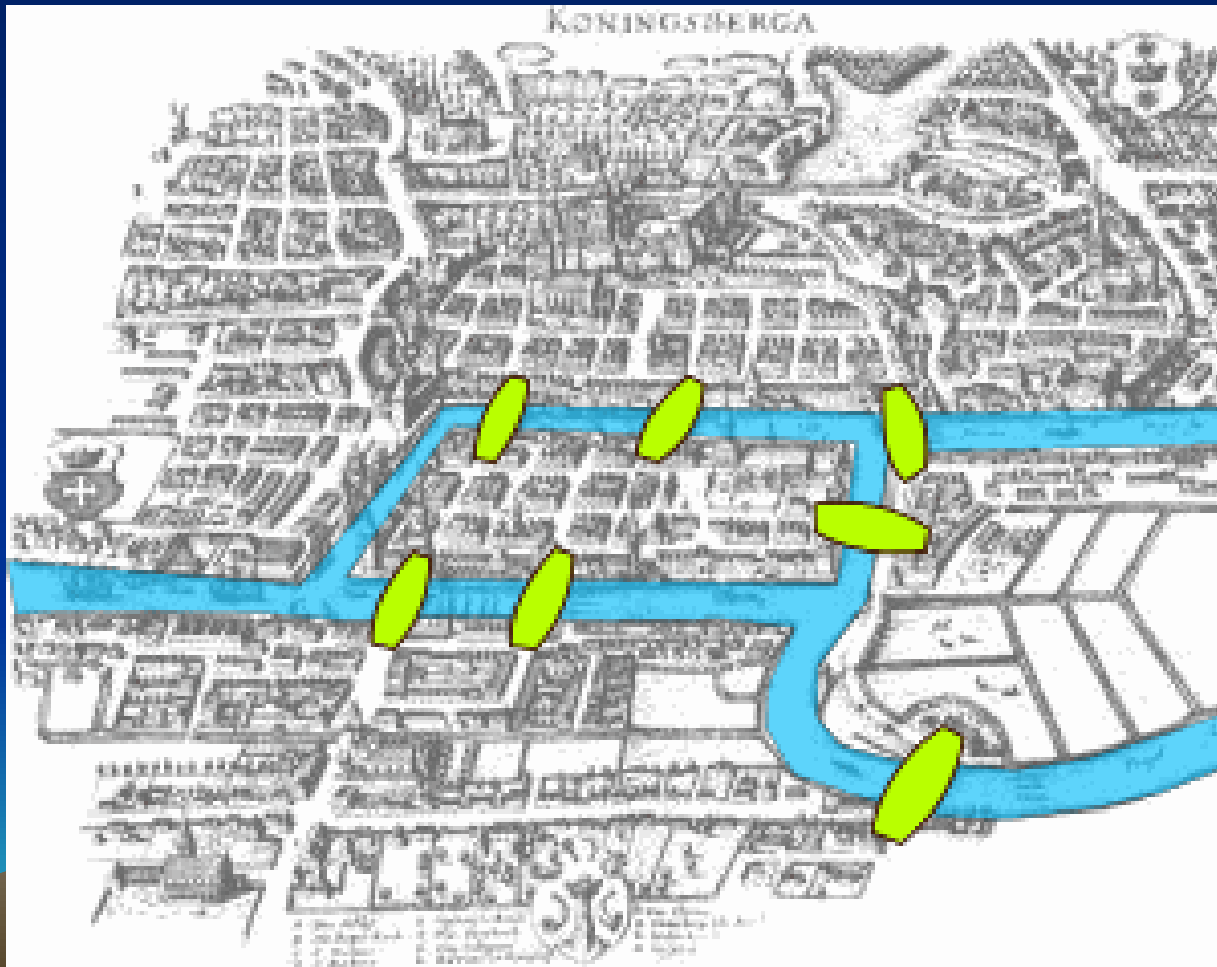


Quelques domaines d'utilisation des graphes:

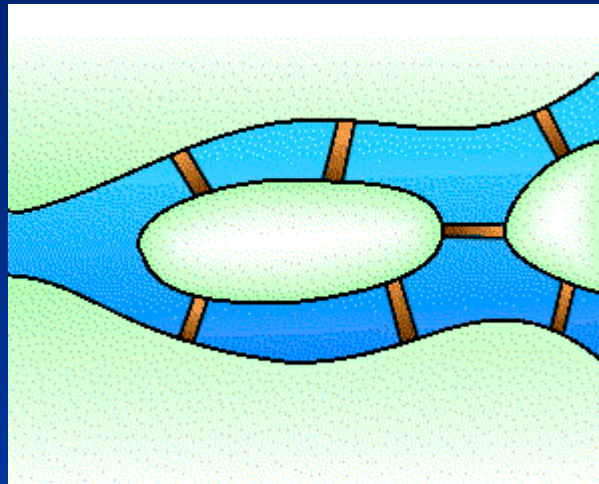
- Réseaux routiers, informatiques
- Circuits imprimés, électriques
- Problèmes du voyageur du commerce:
Existence de chemins les plus courts, les moins coûteux
- Coloriage d'une carte
- Algorithmique
- Jeux logiques
- Autres...



Origine de la théorie des graphes: *Les 7 ponts de Königsberg*



Modélisation du problème



Circuits eulériens

- Un circuit eulérien d'un graphe est un circuit contenant une fois et une seule chaque arête du graphe.
- Si le circuit est fermé il est dit cycle eulérien.
- Exemples:
 - Sur planche/ficelle
 - Sur tablette: Drawesome puzzle
 - Sur ordinateur: <http://www.onetouchdrawing.com/>

—



Théorèmes d'Euler

- Un graphe (connexe) admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
- Un graphe (connexe) admet une chaîne eulérienne ouverte si et seulement si tous ses sommets, à l'exception de deux d'entre eux, sont de degré pair.
Cette chaîne eulérienne admet l'un de ces sommets de degré impair comme origine et l'autre comme extrémité.



- Chemin eulérien: graphe qui peut être dessiné d'un seul coup de crayon, sans repasser sur un tracé.
- Règle:

Si tous les sommets sont pairs	Possible	Départ=Arrivée
S'il existe seulement 2 sommets impairs	Possible	Départ: l'un des sommets impairs Arrivée: l'autre sommet impair
Dans tous les autres cas	Impossible	

Circuit hamiltonien

- Un circuit hamiltonien d'un graphe est un circuit contenant une fois et une seule chaque sommet du graphe.
- Si le circuit est fermé il est dit cycle hamiltonien
- Exemples:



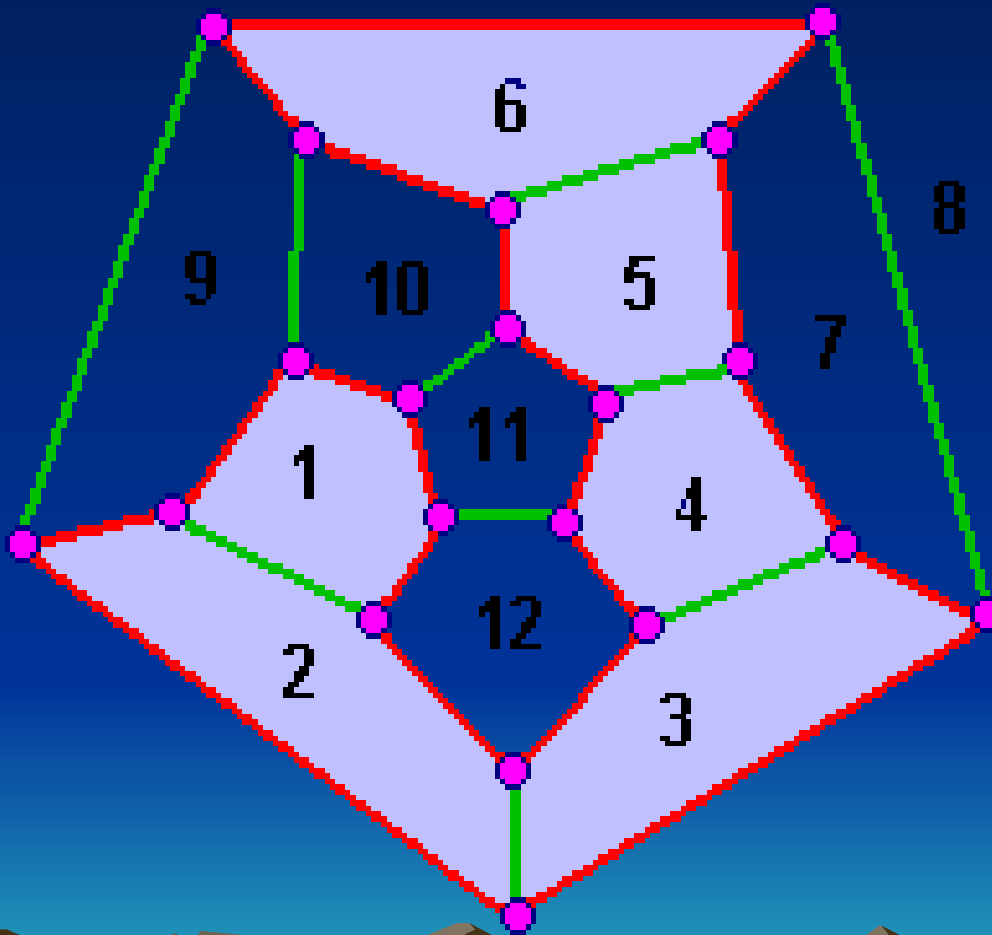
Jeu d'Icosie

- Cette appellation vient d'un jeu proposé par Sir W. Hamilton en 1859 :

Un voyageur veut visiter 20 villes aux sommets d'un dodécaèdre en passant une fois et une seule par chaque ville et en revenant à son point de départ.



Une solution



Parcours sur Mars



Graphes planaires

- Un graphe sans arêtes sécantes est dit planaire.
- Un graphe planaire est dit complet lorsque chaque paire de sommets est reliée par une arête.
- Exercice: Déterminer les graphes planaires complets d'ordre 2, 3, 4, 5,...



Démêler un graphe

- Jeu « Planarity »:

<http://planarity.net/>

- Puzzle untangle:

<http://www.addictinggames.com/puzzle-games/untangle.jsp>



Couplages

- Définir un couplage dans un graphe consiste à lier un maximum de paires de sommets sous certaines conditions.

- Jeux sur tablette ou ordinateur:

Flow-free puzzle:

<http://play.famobi.com/flow-free>

Flow colors: <http://moh97.us/flow/>



Enigme des 3 maisons



Coloration de graphes

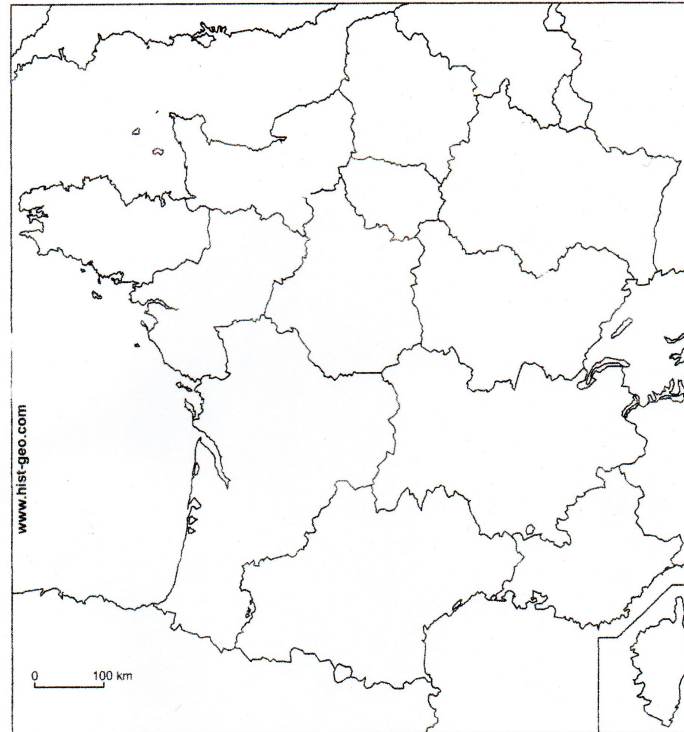
- Coloration valide d'un graphe: aucun sommet n'a la même couleur que ses voisins.
- Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration valide de ce graphe.
- Exercice: recherche de nombres chromatiques



Coloration « valide » des régions françaises?



Coloration des 13 nouvelles régions



Un algorithme de coloration d'une carte

- Construire le graphe dual de la carte.
- Relier les sommets « voisins ».
- Classer dans l'ordre décroissant des degrés (puis ordre alphabétique).
- Colorier le premier sommet en rouge.
- Colorier en rouge tous les sommets non adjacents à ce sommet sauf s'ils sont adjacents entre eux.
- On revient en arrière et on recommence en changeant de couleur.



Coloration de cartes

- Théorème des 4 couleurs:
Tout graphe planaire démêlé a un nombre chromatique inférieur ou égal à 4.
- Conséquence: toute carte peut être coloriée avec au maximum 4 couleurs de façon à ce que des pays voisins aient des couleurs différentes.



Les graphes et « Stratégie mathématiques »

(4 décembre 2014)

- Appréhender les modèles et les outils qui nous entourent et s'adapter aux mutations profondes du XXI^{ème} siècle.
- Promotion d'un environnement plus favorable à l'apprentissage: la dimension **ludique** sera développée afin de motiver davantage les élèves et d'encourager leur autonomie.



Les graphes

et « Stratégie mathématiques »

(4 décembre 2014)

- L'algorithmique servira, aux côtés de la géométrie, de support à la pratique du raisonnement déductif.
- Résoudre des problèmes sur support informatique: explorer et comprendre l'information donnée, se représenter le problème et formuler des hypothèses, planifier et exécuter une stratégie, et évaluer un résultat.

Les graphes et « Stratégie mathématiques »

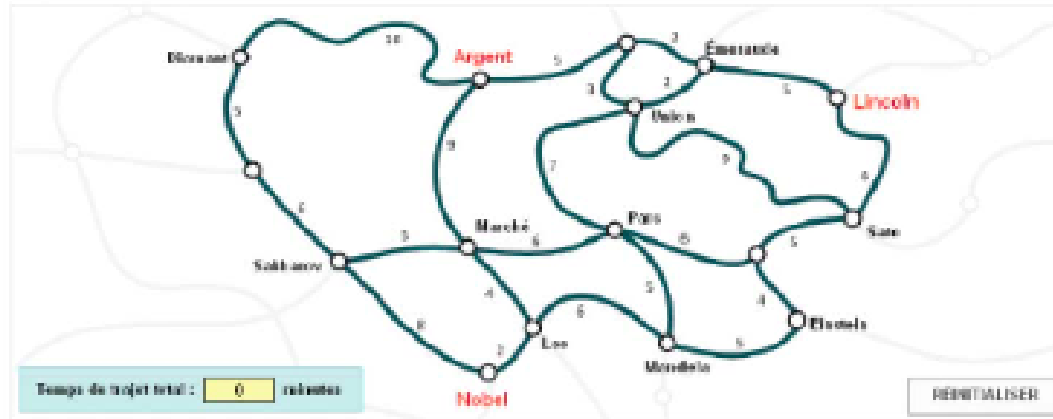
(4 décembre 2014)

exemple
PISA 2012

CIRCULATION ROUTIÈRE

Voici le plan d'un réseau de routes reliant les différents quartiers d'une ville. Le temps de trajet, à 7000 du matin, y est indiqué en minutes pour chaque tronçon de route. Vous pouvez ajouter une route à votre itinéraire en cliquant dessus. Quand vous cliquez sur une route, elle apparaît surlignée et son temps de trajet est ajouté dans le case "Temps de trajet total".

Vous pouvez supprimer une route de votre itinéraire en cliquant à nouveau dessus. Vous pouvez utiliser le bouton RÉINITIALISER pour supprimer toutes les routes de votre itinéraire.



Question 3 : CIRCULATION ROUTIÈRE

Jules souhaite aller de Argent, aller à Lincoln et aller à Nobel. Il veut se rendre dans un des quartiers indiqués sur le carte. Aucun d'eux ne veut faire un trajet de plus de 15 minutes.

Où peut-il se rendre ?



Un exemple de problème interactif

Les graphes

et « Stratégie mathématiques »

(4 décembre 2014)

- L'étude de « problèmes ouverts », « pour chercher », s'appuyant sur des ressources variées, permettra de rendre la pratique des mathématiques plus attractive, de mobiliser davantage de compétences et de stimuler le plaisir de chercher, de choisir ou de construire une méthode, de persévérer et l'envie de trouver



Compétences mises en jeu

- Traitement d'une situation concrète: modélisation pour analyser un problème.
- Manipuler, réaliser : suivre un protocole simple laissant une part d'autonomie.
- Expérimenter en procédant par essais/erreurs, prendre des initiatives, observer, analyser.



Compétences mises en jeu

- Formuler une conjecture à partir d'observations.
- Identifier une méthode, un programme, un algorithme correspondant à la question posée.
- S'organiser pour extraire les informations utiles.



Compétences transversales

- *Se poser des questions*
- *Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures, solides)*
- *Présenter des stratégies qui conduisent à une solution.*
- *Créer des liens entre des faits ou des situations*



Problème des poignées de mains

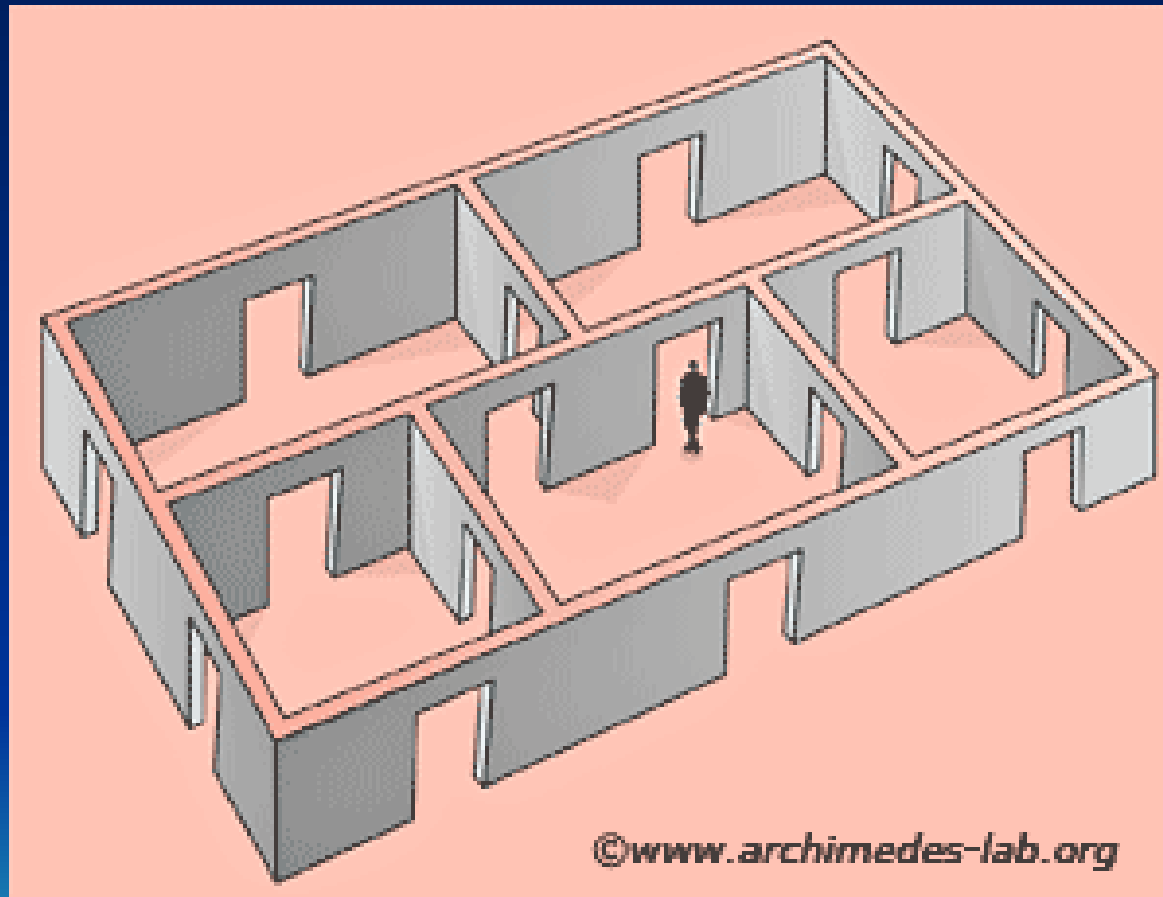
- 5 amis A, B, C, D, E se retrouvent au cinéma.

Combien échangent-ils de poignets de mains?

- Modéliser la situation.
- Nombre de poignets de mains (en général)= ?

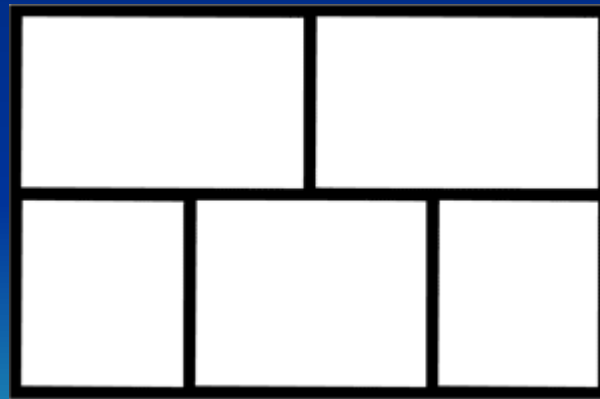


Problème des 5 pièces



Autre façon de poser le pb?

- Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?

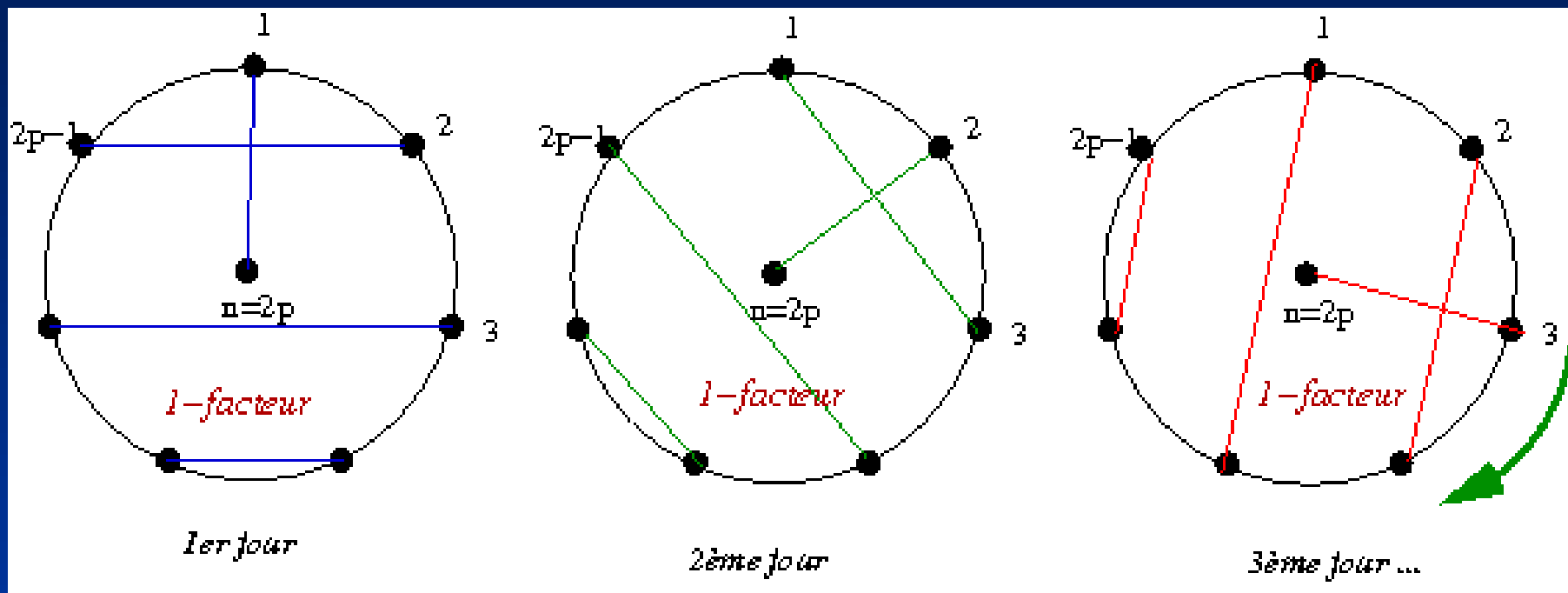


PB des 8 demoiselles (Lucas)

- *« À cette époque, les huit demoiselles d'un pensionnat se promenaient tous les jours en rang par deux. Le problème était de trouver comment les disposer pour qu'en un nombre maximal de jours elles n'aient pas deux fois la même voisine. »*



Une solution



Formule d'Euler

Dans un polyèdre régulier convexe on note:

s: nombre de sommets

f: nombre de faces

a: nombre d'arêtes

La relation $s+f=a+2$

Caractérise les 5 solides de Platon



Solides de Platon

		s	a	f	s+f
Feu	tétraèdre	4	6	4	8
Terre	cube	8	12	6	14
Air	octaèdre	6	12	8	14
Univers	dodécaèdre	20	30	12	32
Eau	icosaèdre	12	30	20	32



SOURCE PRINCIPALE

- <https://sites.google.com/site/jeuxmathematiquesbruxelles>

