Expérimentation, modélisation : quelle place possible dans l’enseignement des mathématiques

Michèle Artigue
Université Paris-Diderot

Une question d’actualité

- Une claire volonté institutionnelle de promouvoir la dimension expérimentale de l’activité mathématique, exprimée notamment via l’introduction d’une nouvelle épreuve au baccalauréat dont l’expérimentation devrait être généralisée à la rentrée prochaine
- L’accent croissant mis dans les programmes et documents d’accompagnement sur les liens entre mathématiques et autres disciplines, mathématiques et société, mathématiques et vie courante, et les activités de modélisation associées

Mais aussi des difficultés attestées

- Par les débats qui entourent l'expérimentation de la nouvelle épreuve et la déstabilisation qu'elle provoque chez beaucoup d'enseignants
- Par les ressources développées où l'on perçoit souvent mal ce qui va permettre à l'élève de développer une véritable activité expérimentale
- Par les observations de classe qui montrent le caractère exceptionnel de ces pratiques quand elles existent, l'exploitation limitée qui en est faite et leur manque d'articulation avec le quotidien de la classe
- Par la difficulté qu'ont beaucoup d'enseignants de mathématiques à trouver leur place dans les dispositifs pluridisciplinaires institutionnels et à en tirer parti

Une situation qui n’est pas propre à la France

- Des tendances analogues dans les orientations curriculaires de nombreux pays
- L’existence de groupes internationaux dédiés à ces questions comme le groupe ICTMA affilié à ICMI
- Des difficultés à faire vivre de façon satisfaisante ces orientations même si l’on dispose de nombreux exemples de réussites locales
- Les exemples des études ICMI « Modelling and applications in mathematics education » (2007) et « Challenging mathematics in and beyond the classroom » (2008, à paraître)

Le plan de l’exposé

- Expérimentation et enseignement des mathématiques
  - Les leçons de l’université d’été de 2007
  - Deux exemples en arithmétique, algèbre et géométrie
  - Le détournement d’exercices très ordinaires
- Modélisation et enseignement des mathématiques
  - Un exemple danois
  - L’expérience de l’UE de modélisation du master professionnel de didactique de Paris 7

Les leçons de l'université d'été: côté mathématiques

- L'importance de la démarche expérimentale dans les pratiques de recherche, dans tous les domaines, à tous les moments de l'activité
- Le potentiel offert par les mathématiques actuelles mais aussi l'intérêt d'une approche historique
- L'interaction entre domaines : emprunts, connexions, analogies, la diversité des domaines sollicités, la jubilation résultant des résonances
- La diversité des ressorts et techniques qui font l'efficacité des démarches expérimentales suivant les domaines
- La distinction à faire entre observation et expérimentation, les rapports complexes entre expérimentation et preuve
- Les changements introduits par l'évolution technologique

Les leçons de l’université d’été: côté enseignement

- La mesure de la distance entre recherche et enseignement
- Des conditions sur les situations :
  - des problèmes s’exprimant simplement, avec des rebondissements possibles, en relation avec la progression de l’enseignement
  - un *milieu* offrant suffisamment de possibilités d’action et de rétroaction
  - une certaine continuité entre établissement de conjectures et preuves
- Des conditions sur l’organisation didactique :
  - ménageant l’espace de liberté nécessaire à la démarche expérimentale
  - une exploitation collective des expérimentations menées
  - prévoyant des productions adaptées
- La question de l’évaluation
- Expérimentation et TICE
- La question des ressources pour les enseignants

Un premier exemple

Quels sont les entiers qui peuvent s’écrire comme somme d’entiers consécutifs ?

Exemples : $5=2+3$, $10=1+2+3+4$

$S(1,p+1)=S(1,p)+(p+1)$

$S(n+1,p)=S(n,p)+p$

n/p	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
2	5	9	14	20	27
3	7	12	18	25	33
4	9	15	22	30	39
5	11	18	26	35	45
6	13	21	30	40	51
7	15	24	34	45	57
8	17	27	38	50	63
9	19	30	42	55	69
10	21	33	46	60	75
11	23	36	50	65	81
12	25	39	54	70	87
13	27	42	58	75	93
14	29	45	62	80	99
15	31	48	66	85	105
16	33	51	70	90	111

De la conjecture à la preuve

$S(n,p) = n + (n+1) + \dots + (n+p-1)$

$2S(n,p) = p(2n+p-1)$

$S(n,p) = p(2n+p-1)/2$

S(n,p) ne peut pas être une puissance de deux

$\Updownarrow$

S(n,p) a au moins un diviseur impair

Une preuve qui n'explique pas

- Réciproquement, si N n'est pas une puissance de 2, il peut s'écrire :

  $$\mathbf{N = 2^k.k' \text{ avec } k'>1 \text{ impair}}$$

- On identifie avec S(n,p) en posant :
  - $p = 2^{k+1}$ et $2n+p-1 = k'$

ou

  - $p = k'$ et $2n+p-1 = 2^{k+1}$

  pour satisfaire à la fois $n>0$ et $p>1$

Et cela marche !

Une preuve qui explique

- Si $p=2m$,

  $k-m+1, \ldots , k, k+1, \ldots , k+m$

  Calcul par regroupement : $S=m(2k+1)$ et $k \geq m$
- Si $p=2m+1$

  $k-m \ldots , k, \ldots , m+k$

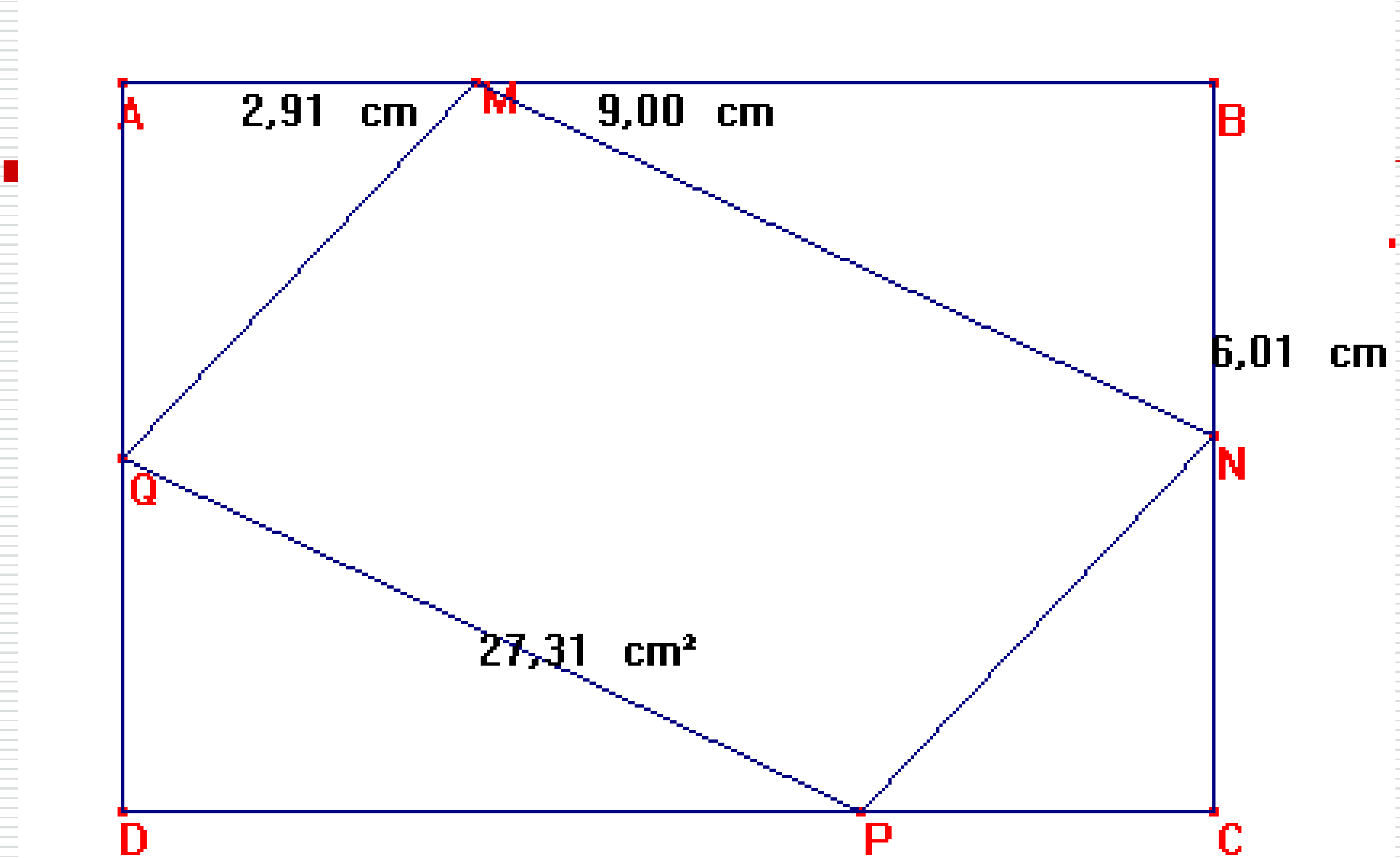
  Calcul par compensation : $S=k(2m+1)$ et $k>m$
- On échange m et k

  $S=m(2k+1)$ et $k<m$

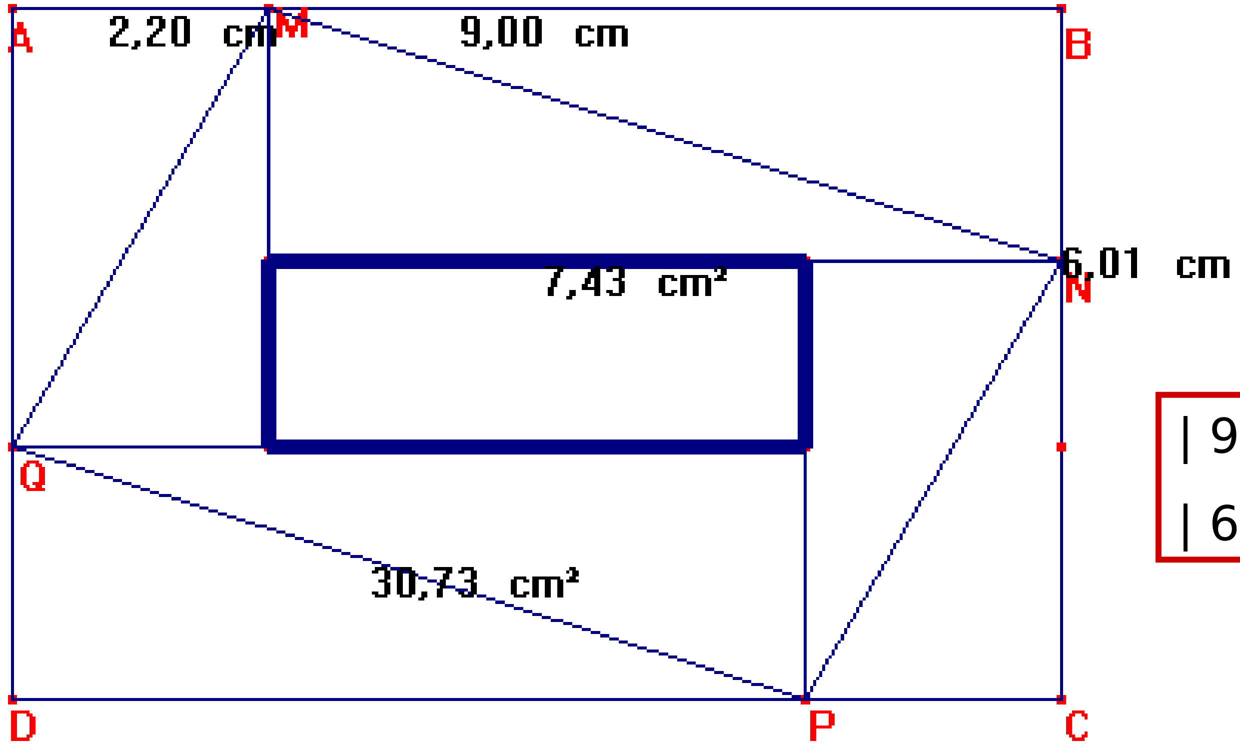
La réciproque devient évidente !

On obtient de plus toutes les solutions et on montre qu'il y en a autant que de diviseurs impairs strictement supérieurs à 1 de S

Un deuxième exemple : conjecture, preuve et rebondissements



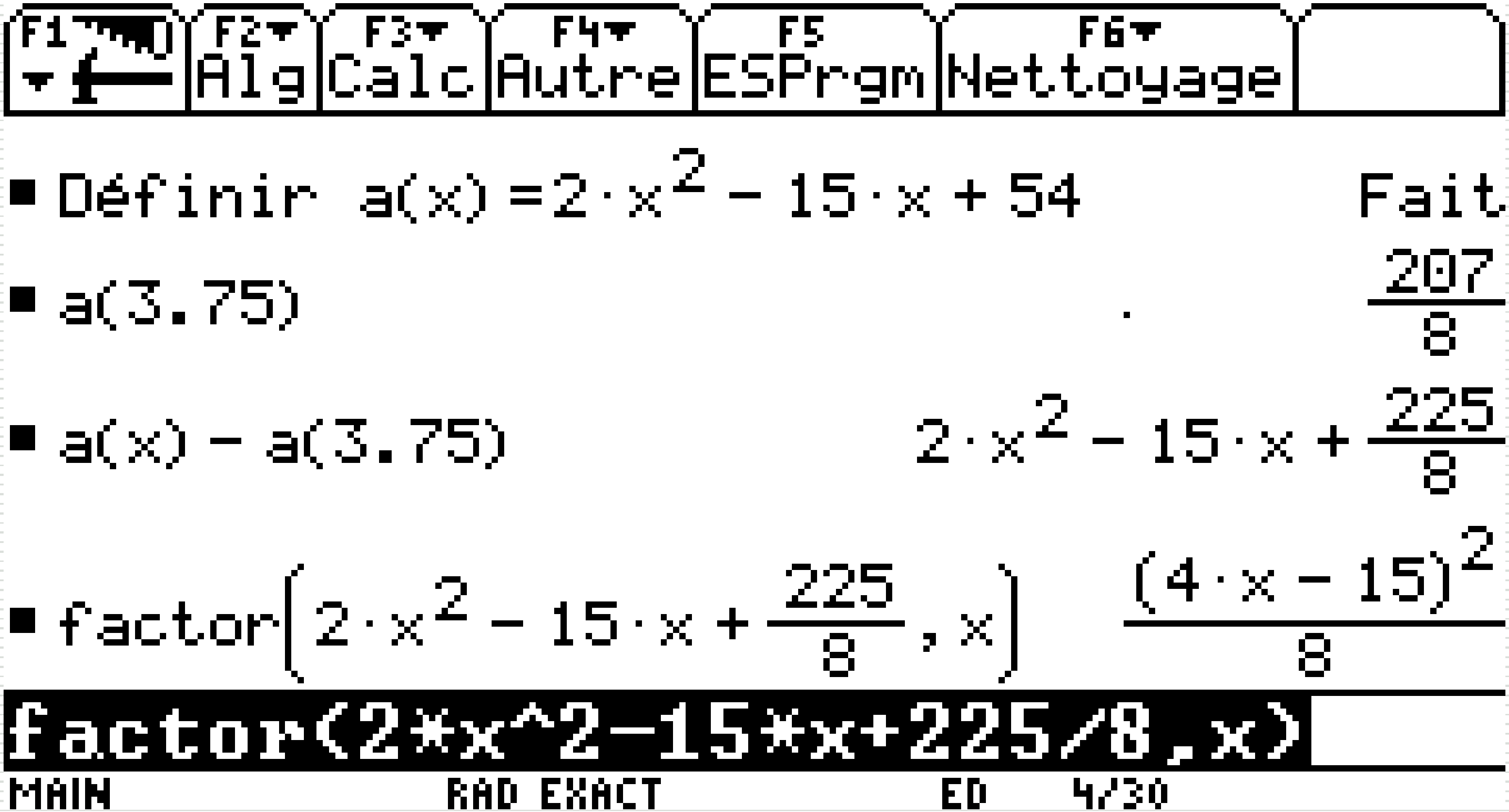
Expérimentation et preuve géométrique



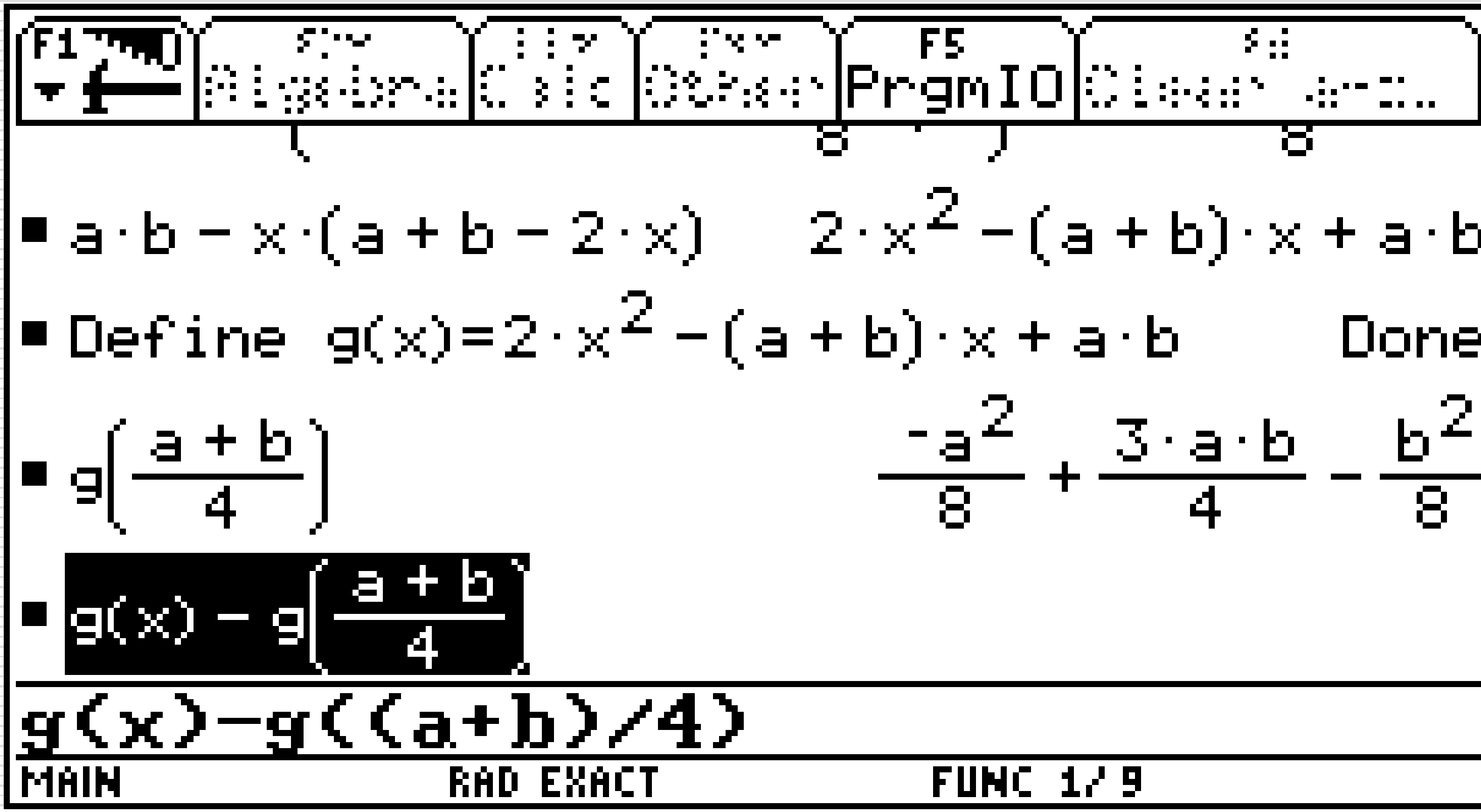
| 9 - 2x |

| 6 – 2x |

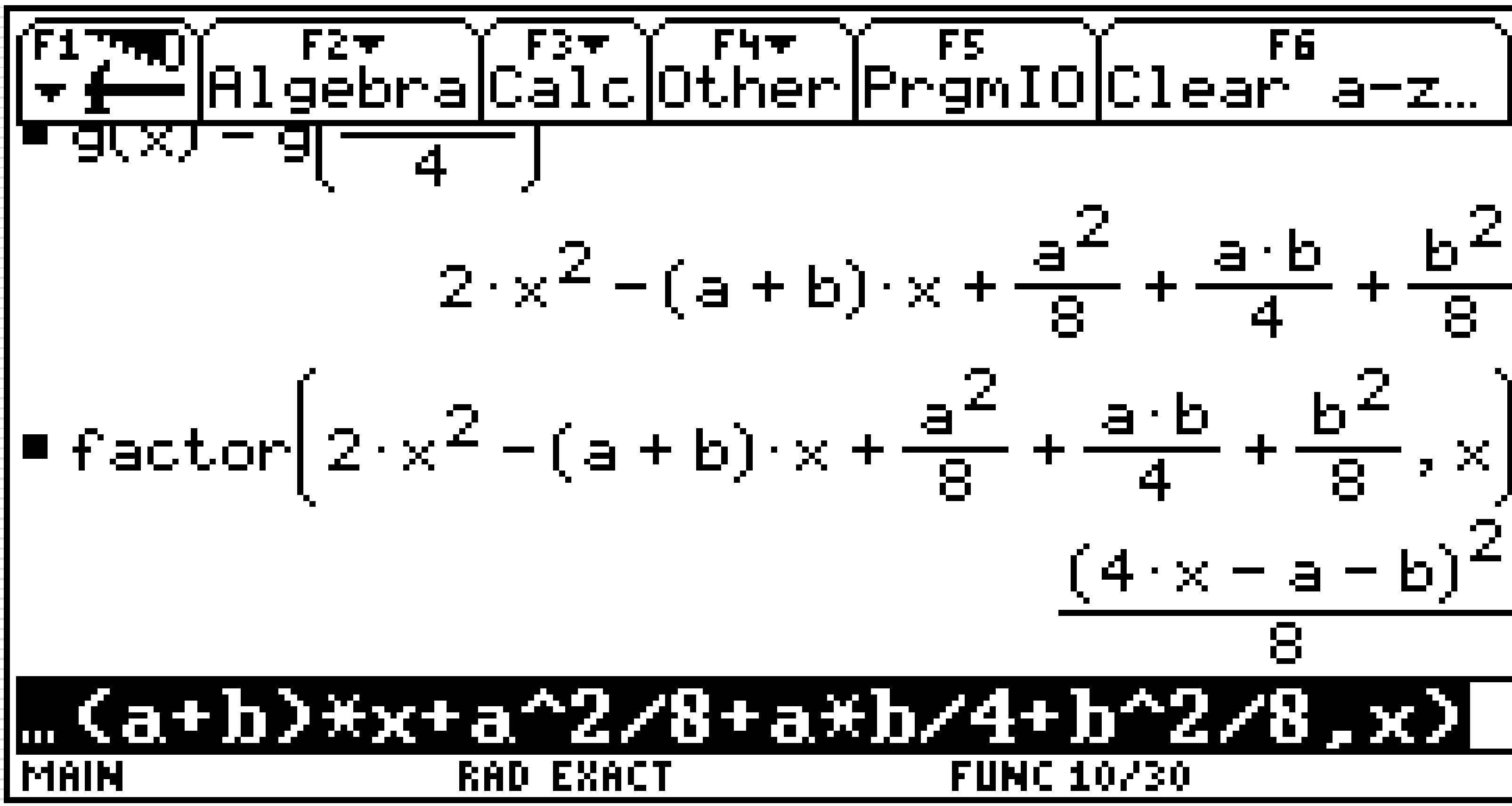
Une preuve algébrique portée par la conjecture



Un premier rebondissement



Un premier rebondissement



Le détournement d'exercices ordinaires : un premier exemple

OAB est un triangle rectangle isocèle en O et OA=4cm

OAQR est un rectangle et OR=2cm

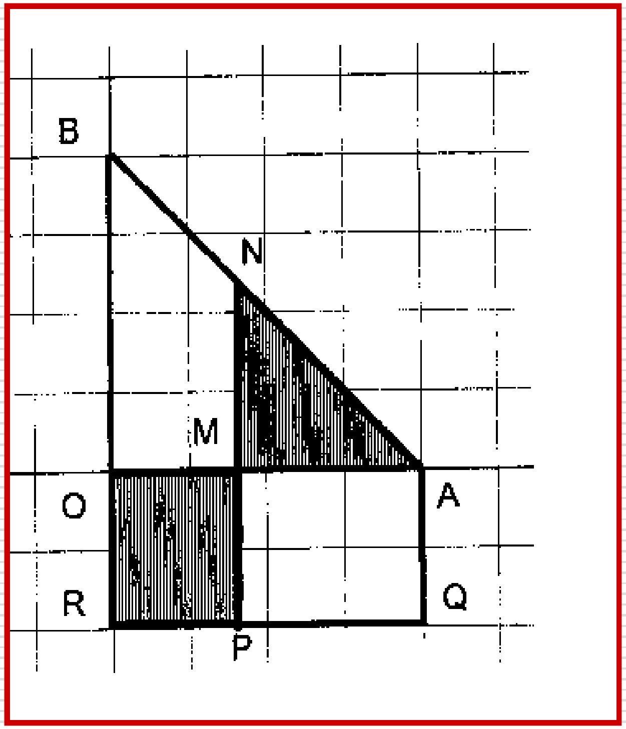
(MN) est parallèle à (OB)

On pose OM=x et on note A(x) l'aire du rectangle OMNP et B(x) celle du triangle AMN

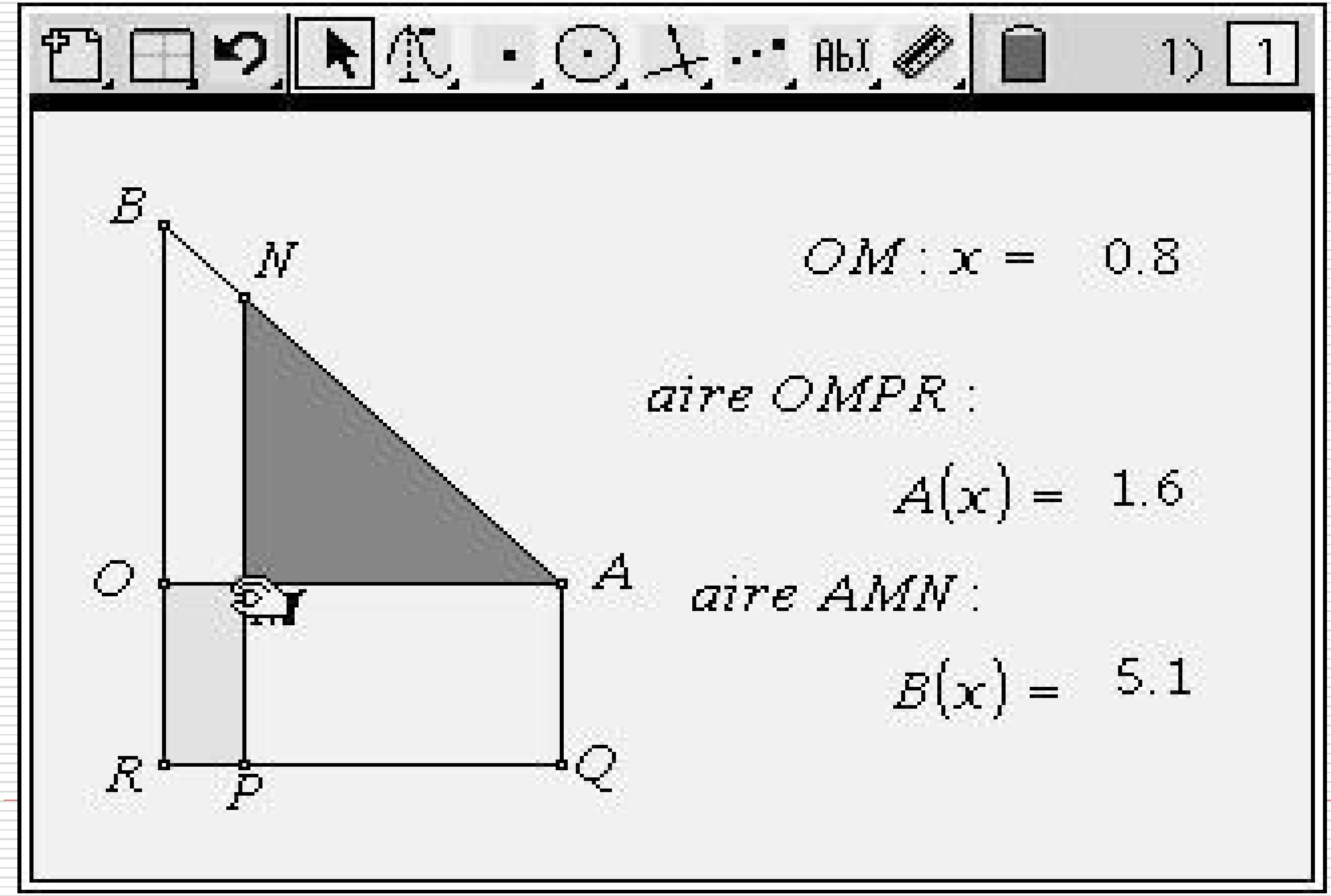
1) Exprimer AM et MN en fonction de x

2) Calculer A(x) et B(x)

3) Trouver la valeur de x telle que les aires A(x) et B(x) soient égales (on pourra développer l'expression $(x-6)^2 - 20$)



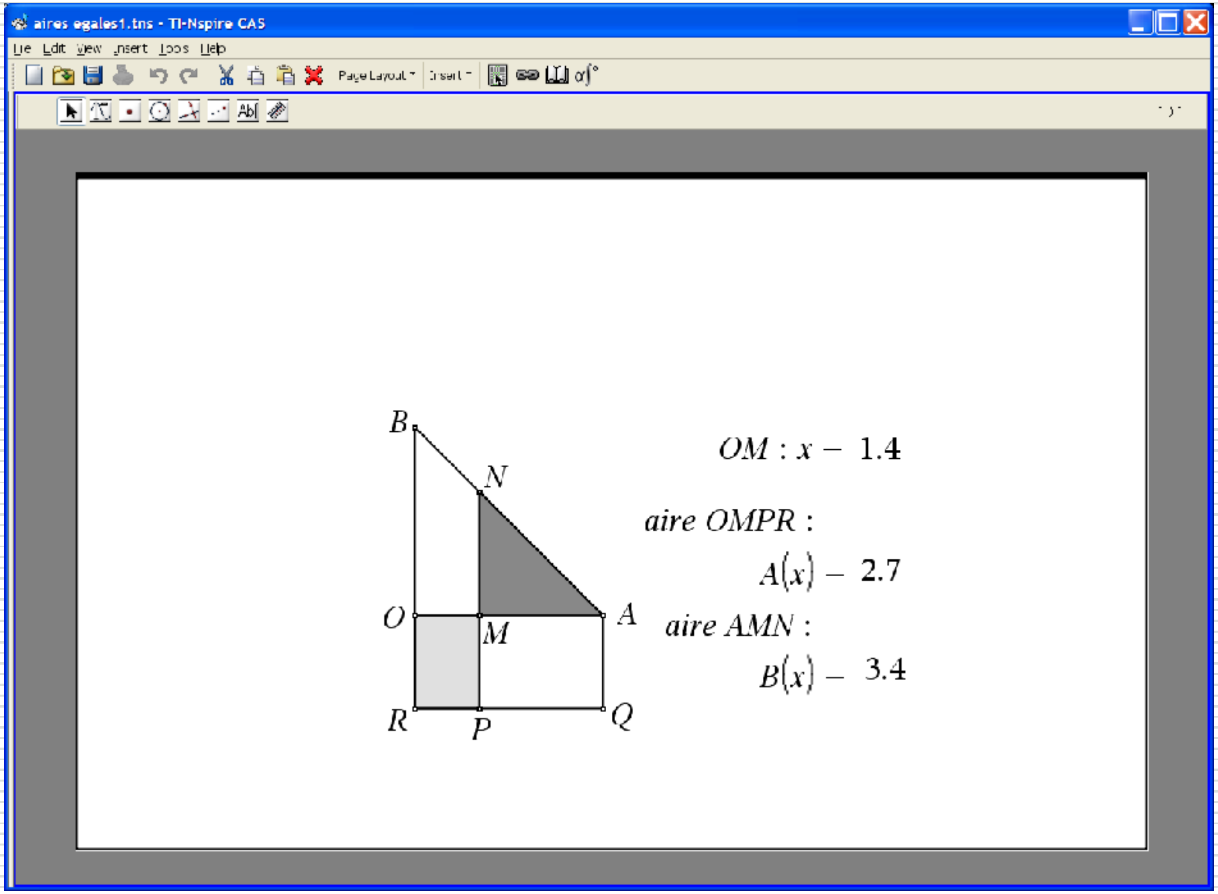
Une approche expérimentale avec la TI-nspire



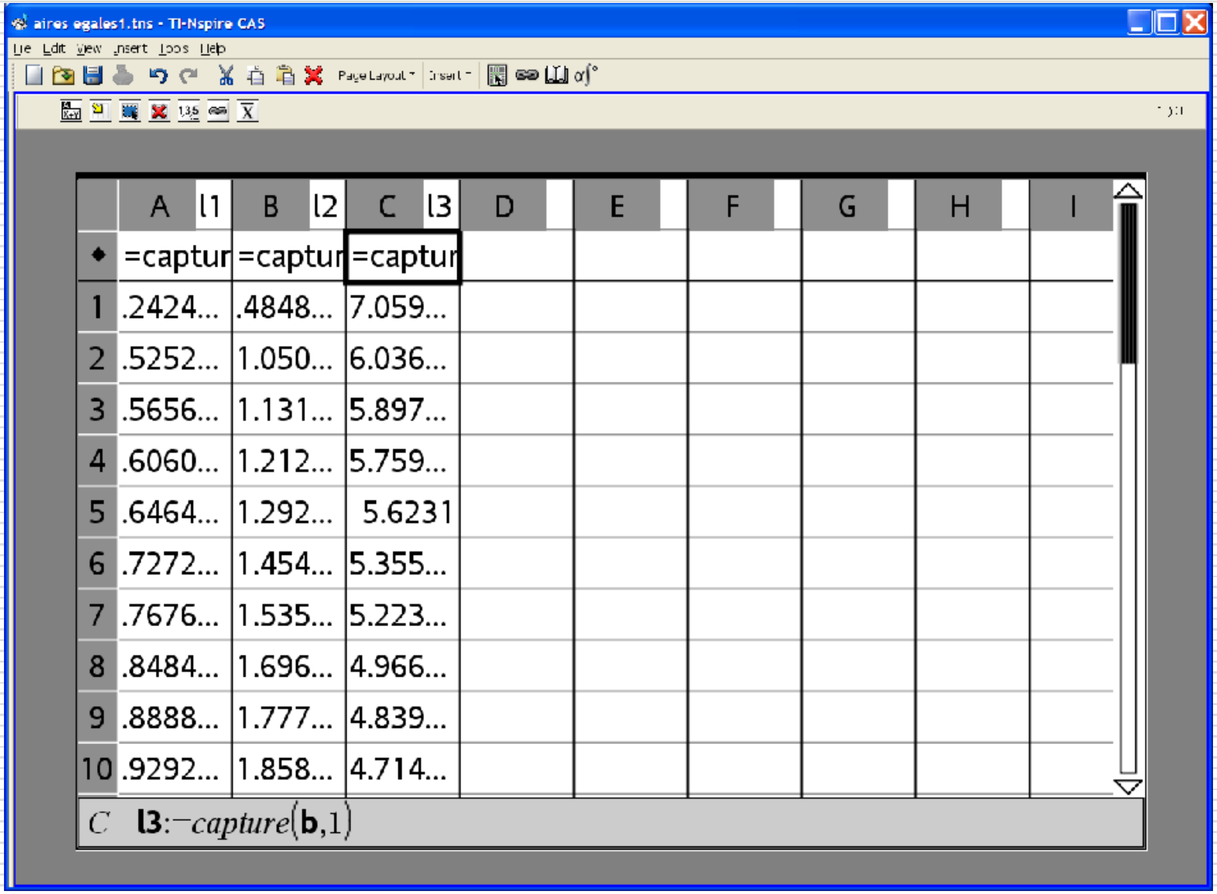
La diversité des approches possibles sur ce type de problème avec les TICE

- Une exploration géométrique (SA), éventuellement couplée avec une capture de données et le déplacement de droites ou paraboles pour conjecturer l'expression des aires (SA)
- L'exploration numérique avec le tableur à partir d'expressions exactes des aires (SA)
- L'exploration graphique à partir d'expressions exactes des aires (SA)
- La résolution symbolique de l'équation (SE)

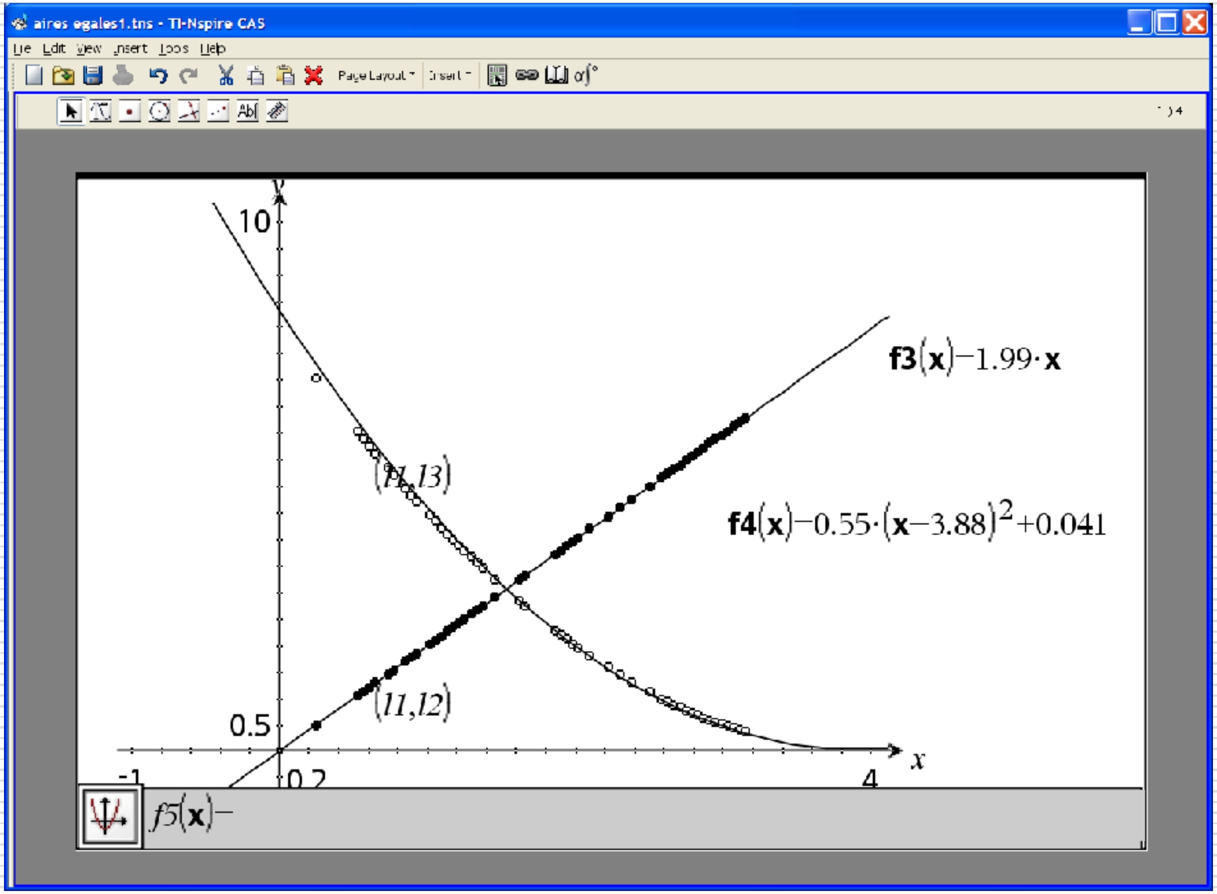
Exploration géométrique



Capture de données

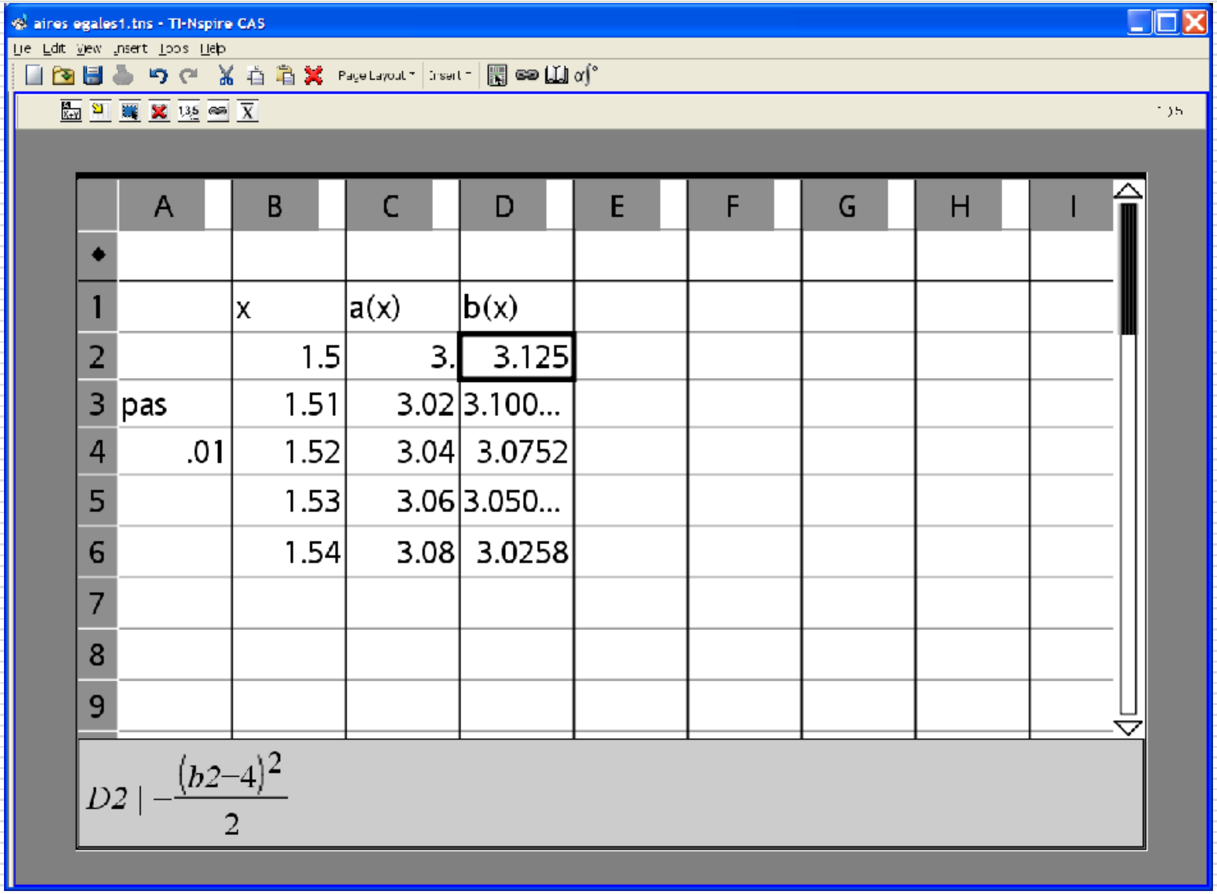


Ajustement

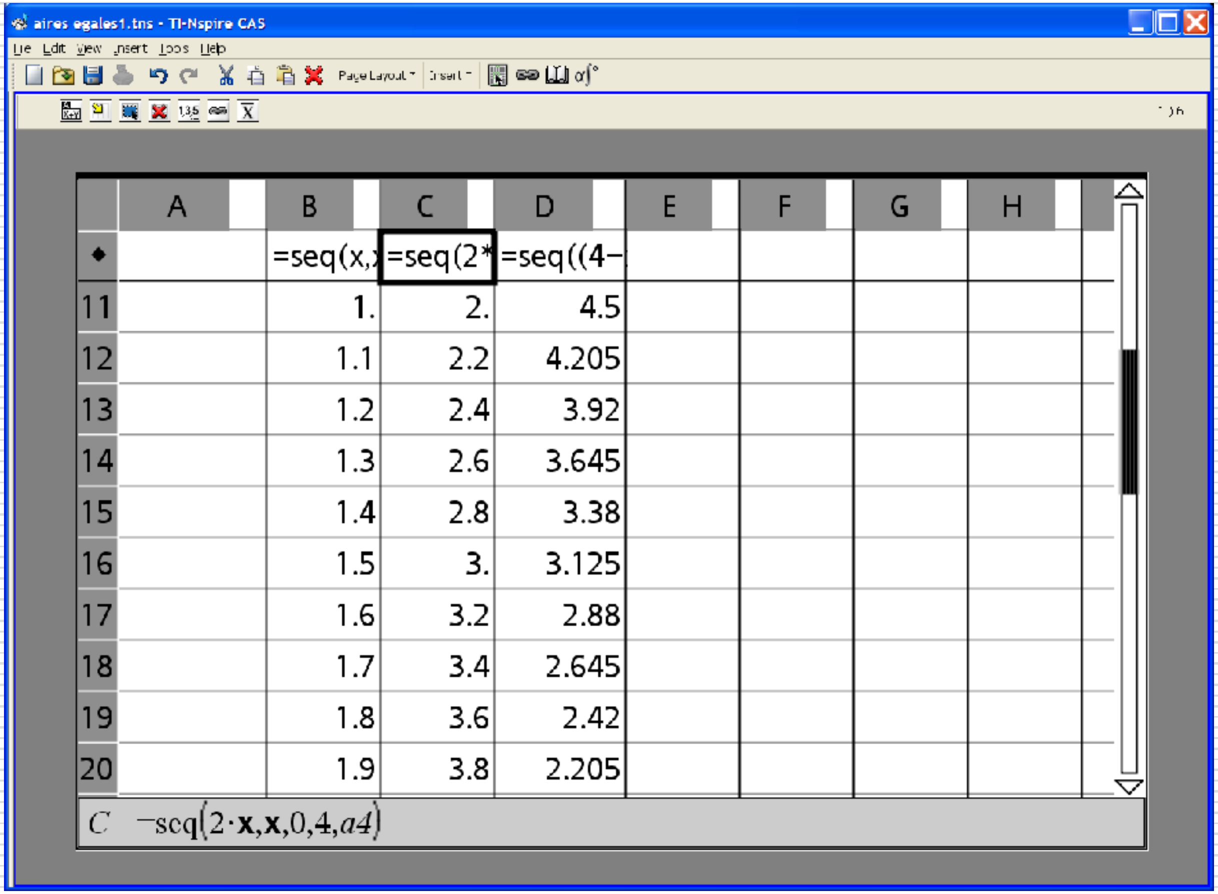


aires egales1.tns - TI-Nspire CAS
f3(x)=1.99·x
f4(x)=0.55·(x−3.88)^2+0.041
(l1,l3)
(l1,l2)
10
0.5
-1
0.2
4
x
y
f5(x)=

Utilisation du tableur

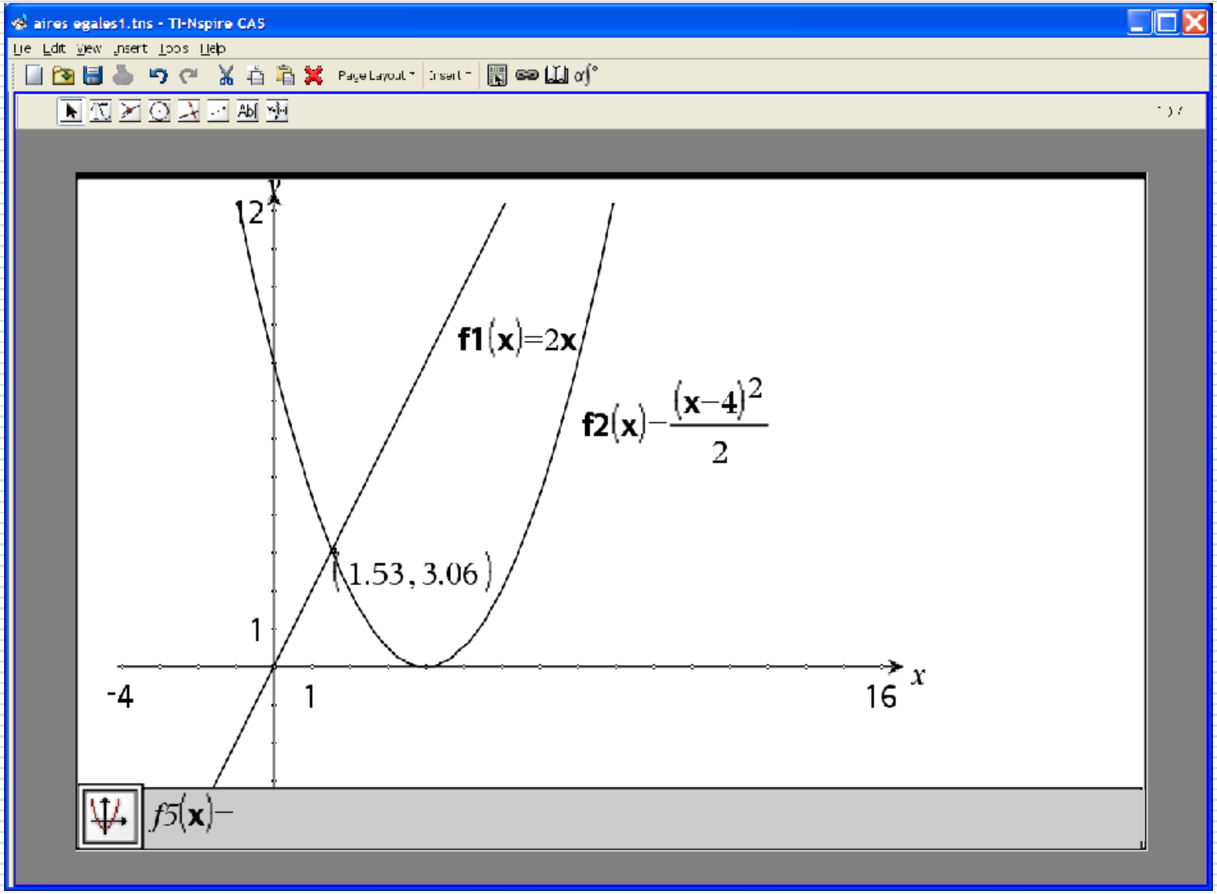


Utilisation du tableur

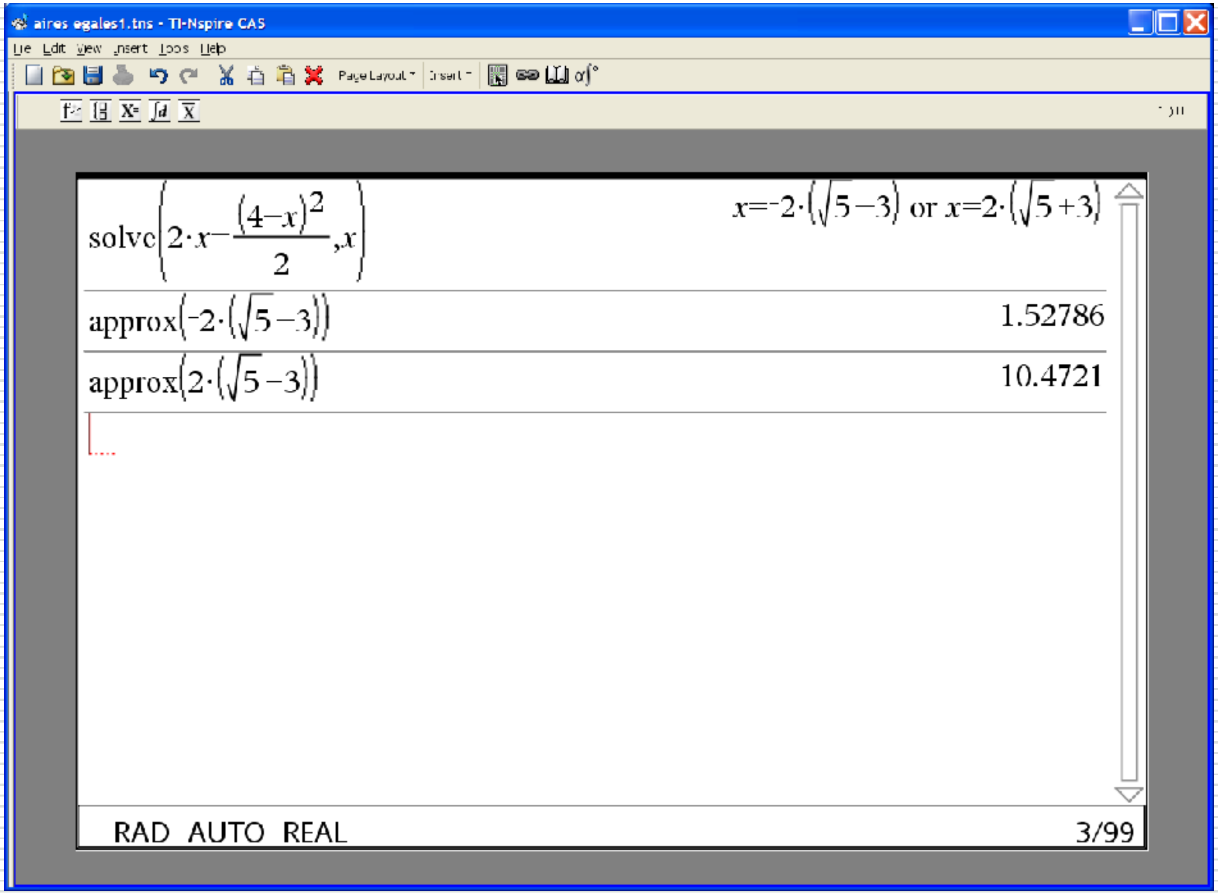


	A	B	C	D	E	F	G	H
◆		=seq(x,x	=seq(2*	=seq((4−				
11		1.	2.	4.5				
12		1.1	2.2	4.205				
13		1.2	2.4	3.92				
14		1.3	2.6	3.645				
15		1.4	2.8	3.38				
16		1.5	3.	3.125				
17		1.6	3.2	2.88				
18		1.7	3.4	2.645				
19		1.8	3.6	2.42				
20		1.9	3.8	2.205				

Résolution graphique



Résolution symbolique



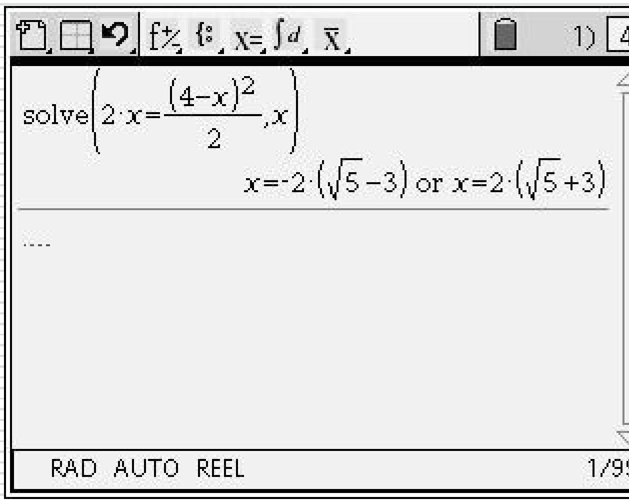
Exploitations collectives

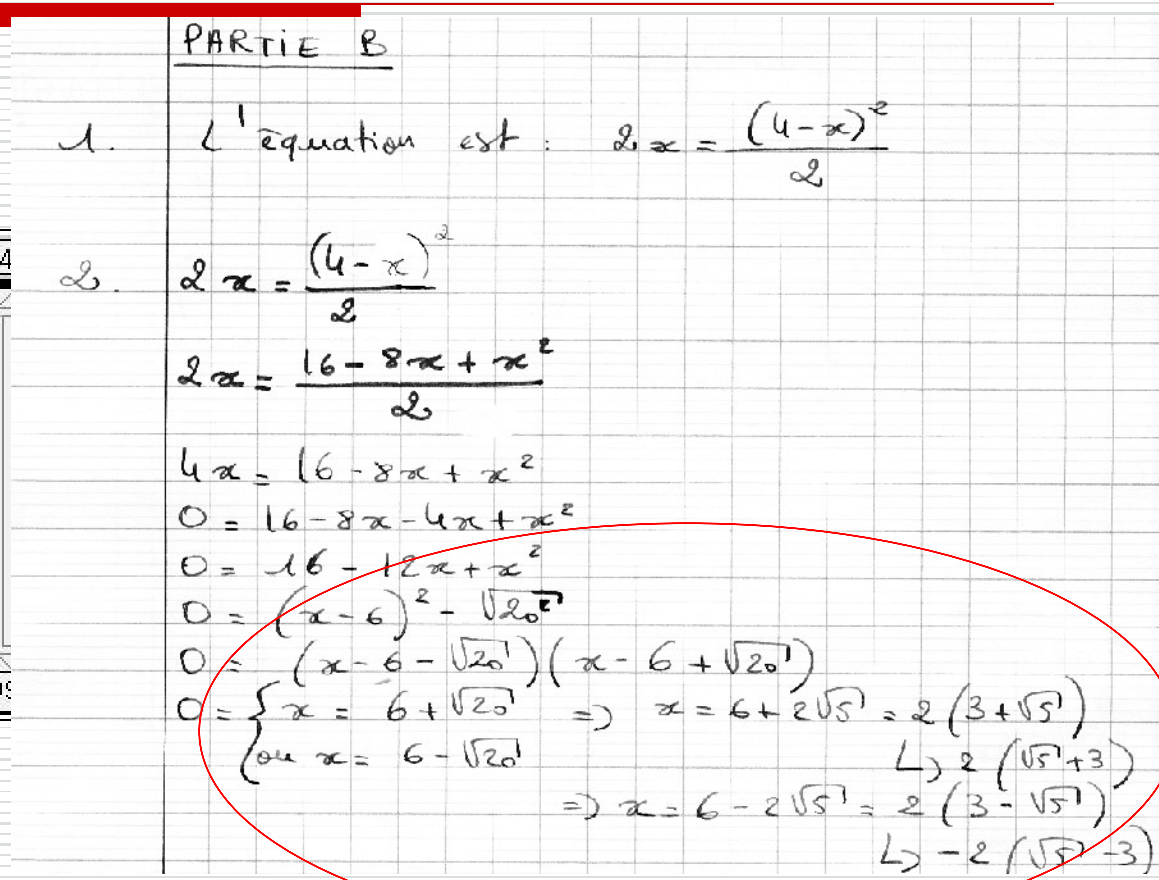
- Les différentes méthodes pour démontrer que le triangle AMN est isocèle
- L’approche numérique : la différence entre trouver une solution approchée et trouver un encadrement ; comment utiliser le tableur pour trouver un tel encadrement, le raffiner
- L’approche graphique : intersection des courbes ou intersection avec l’axe Ox de la courbe associée à la différence des aires
- L’approche algébrique : ce que la commande Solve fait et l’interprétation des résultats qu’elle fournit ; l’articulation avec la résolution papier-crayon
- La comparaison des différentes approches

Mais aussi :

- L’intérêt de demander des valeurs approchées des valeurs exactes pour les situer
- L’utilisation du calcul symbolique pour contrôler le calcul algébrique : factorisations, simplifications
- Le contrat didactique

Interaction entre travail TI et travail papier-crayon





L’expérimentation de divers scénarios

- Un scénario original prévoyant un travail individuel en contrôle, très guidé
- Un second scénario organisant un parcours guidé à travers trois approches (Ge, Nu, Sy) – travail en groupes – narration - synthèse différée
- Un troisième scénario organisant un parcours guidé à travers les quatre approches (Ge, Nu, Gr, Sy) - travail en groupes – narration - synthèse différée
- Un quatrième scénario laissant le choix à l’élève des approches (2 minimum), texte court - cohérence et nature des résultats obtenus mis en relief - travail en groupes – aides prévues – narration - synthèse différée

Une tâche proposée en formation

- On considère l'exercice suivant proposé à des élèves de troisième :
  - On donne un triangle ABC tel que AB = 5cm, BC = 9cm et AC=7cm. Par un point M de [AB], on trace la parallèle à (BC) qui coupe [AC] en N
  - On pose AM=x.
  - Calculer AN et MN en fonction de x.
  - Trouver x pour que le périmètre de MNCB soit égal à 19,8cm
- Construire à partir de cet exercice une situation engageant une démarche expérimentale

En conclusion

- La démarche expérimentale : de l’extraordinaire vers l’ordinaire
- L’importance de l’orchestration
- L’appui des TICE

Modélisation

- Un exemple danois

- L’expérience du groupe IREM Modélisation et de l’UE Modélisation du master professionnel Didactique

Un exemple danois: un spot dans une campagne télévisée

10=44

« Une voiture roulant à 60km/h double une voiture roulant à 50km/h. Quand les deux voitures sont côte à côte, un enfant apparaît quelques mètres devant. Les deux conducteurs réagissent de façon identique et leurs voitures ont des freins de même qualité. La seconde voiture s'arrête juste devant l'enfant tandis que l'autre le heurte avec une vitesse de 44km/h. Sept enfants sur dix meurent dans un tel accident! »

Question : Est-ce que cela peut-être vrai ?

$V_{2c}^2 = V_2^2 - V_1^2 + 2bt_r(V_2 - V_1)$

« Suivant notre modèle, l’affirmation est seulement vraie quand $bt_r=11{,}61 m/s$. En prenant $b=9{,}82 m/s^2$ comme effet de freinage maximum, cela donne 1,18s comme temps de réaction. C’est une réaction lente pour quelqu’un qui ne serait pas sous l’emprise de l’alcool ou d’une drogue »

L’historique du groupe IREM

- La création en 1999 dans le contexte de la mise en place des TPE: le suivi des TPE dans plusieurs établissements en liaison avec la préparation de stages de formation continue
- L’évolution vers un travail pluridisciplinaire sur la modélisation et les possibilités nouvelles ouvertes par la mise en place du master professionnel didactique en 2004

Penser en termes de modélisation, c’est:

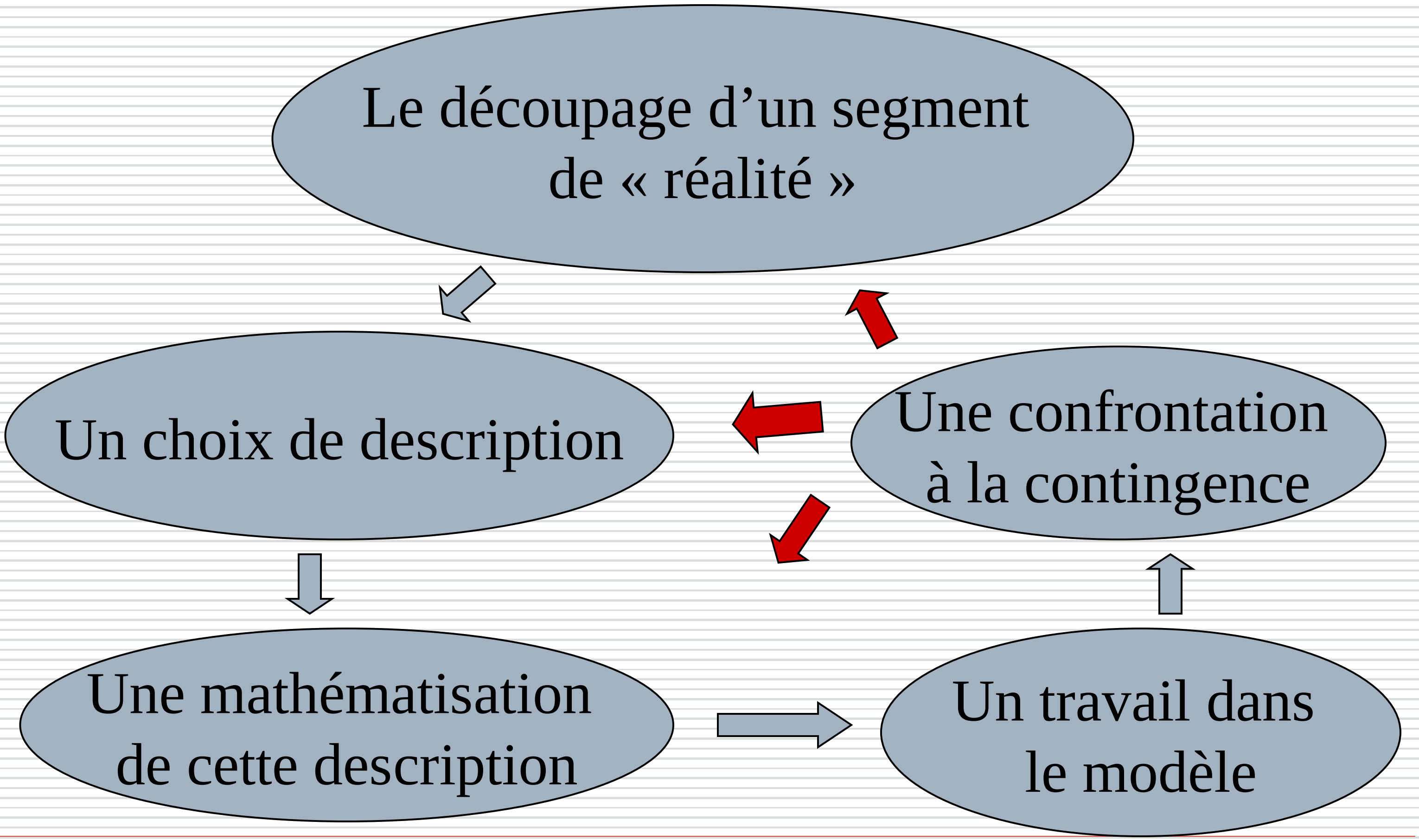
- Aller au-delà d’une vision « applicative » des mathématiques,
- Percevoir comment s’établit la mise en relation entre systèmes qui est en jeu dans la modélisation,
- Mais aussi s’interroger sur les fonctions de cette modélisation,
- Et exercer sur elle a posteriori le travail de la critique.

Modélisation et application des mathématiques

A quoi peut bien servir
cette partie
des mathématiques ?

Quelles mathématiques
peuvent-elles m'aider
à résoudre ce problème ?

Le processus de modélisation



Différents types de modèles pour différentes fonctions

- Décrire
- Expliquer
- Prédire
- Agir, contrôler

Des critères différents pour juger de la pertinence, de la validité.

Différents modèles pour une même situation

- Chaque modèle est associé à un point de vue sur la « réalité » qu’il considère. Il y a pour une même situation en général de très nombreux modèles possibles, concurrents ou complémentaires.
- Les modèles sont des entités adaptables et, très souvent, il est difficile de les falsifier en recourant à une expérience cruciale.

Différents modèles : le cas des changements d’échelles, de grain

- Un même phénomène physique : radioactivité, réaction chimique est modélisé de façon déterministe par une équation différentielle au niveau macroscopique, de façon aléatoire au niveau microscopique (loi de Poisson, chaînes de Markov)
- Une situation plus complexe avec l’exemple du traffic routier : des hiérarchies de modèles avec des modèles origine-destination, des modèles hydrologiques, des modèles particulaires, aux fonctionnalités différentes.

Différents modèles : la concurrence des points de vue

- Les modélisations du système solaire d’Aristote à Copernic et Képler
- Les modélisations de l’épidémie de SIDA
- La modélisation des crues d’un fleuve suivant que l’on considère les hauteurs d’eau ou les débits : des modèles incompatibles mais indéfiniment adaptables et qui résistent aux tests les plus sévères.

Les objectifs de la formation en modélisation

- Faire rencontrer, travailler, discuter, sur des exemples précis ces différentes facettes du travail de modélisation.
- Penser leur transposition possible dans l’enseignement et la formation dans le cadre des dispositifs existants.
- Réfléchir sur les outils mathématiques élémentaires de la modélisation, qu’elle soit déterministe ou probabiliste, en distinguant les situations qui vont permettre un travail analytique et celles où l’on ne pourra accéder à des résultats que via la simulation.

Trois phases dans l’enseignement :

- une phase introductrice avec notamment:
  - des exemples historiques (Képler, Bernouilli)
  - l’introduction d’outils de base
  - la présentation de projets antérieurs
- une phase de travail sur projet en petits groupes
- une phase de présentation des réalisations et d’approfondissement du travail sur des transpositions possibles dans l’enseignement ou en formation

Des exemples de projets

- Des thèmes classiques: modélisation d’épidémies, de formes (toiles d’araignées, empreintes digitales, structures fractales…)
- L’élucidation d’articles de vulgarisation scientifique (marches aléatoires auto-évitantes, processus de recrutement, l’algorithme Page Rank)
- Des problèmes d’optimisation: synchronisation de feux tricolores, installation d’antennes de téléphonie mobile
- L’exploitation de représentations (Effet Doppler, ADN et Chaos Game Theory)
- Des mathématiques du citoyen (nouvelles formes de crédit, éoliennes)
- Autour d’Hardy-Weinberg

Quelques références

- Giorgio Israel (1996). La Mathématisation du réel. Editions du Seuil.
- Nicolas Bouleau (1999). Philosophies des mathématiques et de la modélisation. L'Harmattan.
- DESCO (2003). La pluridisciplinarité dans les enseignements scientifiques. CRDP Basse Normandie.
- Les dossiers modélisation dans les bulletins 440 et 441, 456, 458, 459 de l'APMEP.
- CREM (2004). Mathématiques et autres disciplines. Rapport.
- CSIREM (2004). La modélisation.
- ICMI Study 14 (2007). W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, M. Niss ' (eds). Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer.
- Actes de l'Université 2007 : http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2007/UE_2007_Internet.htm
- Thematice n°9