

🌀 Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2009 🌀

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4i$. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$. L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

- Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.
 - En déduire que les points B et D sont sur un cercle \mathcal{C} de centre A dont on déterminera le rayon.
- Soit E l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
 - Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.
 - Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].
 - Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].
- Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(4; 0; 0), \quad B(0; 2; 0), \quad C(0; 0; 3) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit (\mathcal{P}) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M; y_M; z_M)$ la distance δ_M du point M au plan (\mathcal{P}) est égale à :

$$\frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.
 - Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3; 6; 4)$.
Montrer que \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC).
 - Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.
 - Déduire des questions précédentes la distance δ_E .

2. a. Montrer que la droite (\mathcal{D}) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

- b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).
c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E .

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n -ième cible est atteinte ».
- \bar{A}_n l'évènement : « la n -ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement \bar{A}_n .

1. Donner a_1 et b_1 .

Calculer a_2 et b_2 . On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,

$$\text{puis : } a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

- a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme U_1 .
b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n , puis l'expression de a_n en fonction de n .
c. Déterminer la limite de la suite (a_n) .
d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geq 0,6665$.

EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .
b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

- c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.
2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$.
- b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2 - b)e^{-b} + (2 + a)e^{-a}.$$

- b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
- c. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- d. Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e$.
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?