Baccalauréat Nouvelle Calédonie mars 1958

SÉRIE MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

I

1er sujet

Représentation d'une droite par une équation du premier degré. Coefficient angulaire.

2e sujet

Dérivée. Signification géométrique. I. -

3e sujet

Fonction primitive.
Utilisation pour le calcul de certaines aires.

II. Problème

On donne. dans le plan, un axe $x'Ox$ et l'on appelle (Γ) tout cercle du plan coupant $x'x$ en A et B de façon que

$$\overline{\text{OA}}\cdot\overline{\text{OB}} = \frac{\text{AB}^2}{4}.$$

On désigne par M le centre, par R le rayon d'un tel cercle (Γ), par 2λ la longueur du segment AB, par I le milieu de AB.

1. Montrer que, pour qu'un cercle du plan coupant $x'x$ en deux points A et B soit un cercle (Γ), il faut et il suffit que l'on ait $\text{OI} = \dfrac{\text{AB}\sqrt{2}}{2}$, I désignant le milieu de [AB].
   Quelle est la propriété des cercles (Γ) pour lesquels λ conserve une valeur donnée ?
2. Construire géométriquement (Γ), connaissant λ et R ; discuter en faisant varier λ.
   On désigne par F et F$'$ les points sur $x'x$ tels que OF = OF$'$ = R ; calculer MF et MF$'$ en fonction de R et de λ.
   En déduire le lieu de M lorsque, R conservant la même valeur, λ prend toutes les valeurs possibles.
3. On donne la droite Δ parallèle à $x'x$ et distante de celle-ci de la longueur OD = d.
   Construire géométriquement (Γ), connaissant λ, lorsque (Γ) est tangent à Δ.
   On désigne par ω le symétrique de D par rapport à O ; montrer que la puissance de ω par rapport à un tel cercle (Γ)) ne dépend que de d.
   En déduire que, si λ varie, les cercles (Γ), tangents à Δ restent tangents à un cercle fixe, (G), dont on précisera le centre, G, et le rayon.
   Quel est le lieu des centres M de ces cercles (Γ) ?

4. Construire géométriquement (Γ), connaissant λ, lorsque (Γ) a son centre M situé sur Δ.

La médiatrice de CM coupe un tel cercle (Γ) en deux points P et P$'$ (P du côté de O par rapport à Δ) ; P se projetant en H sur la droite OC et O$'$ désignant le symétrique de O par rapport au point D, établir les égalités

$$\overline{\text{HO}}\cdot\overline{\text{HO}'} = \text{HP}^2 = \frac{\lambda^2}{2}.$$

En déduire que, si λ varie, le lieu de P (et de P$'$) est une conique à centre, dont on désignera les foyers par φ et φ' (φ du côté de O par rapport à Δ).

Démontrer que les points M, P, P$'$, φ et φ' sont sur un même cercle et en déduire que la conique lieu de P et P$'$ est également l'enveloppe des cercles (Γ) dont le centre M décrit Δ.