Journées APMEP Metz
Atelier P1-32 du dimanche 28 octobre 2012
Louis-Marie BONNEVAL

Chaînes de Markov au lycée

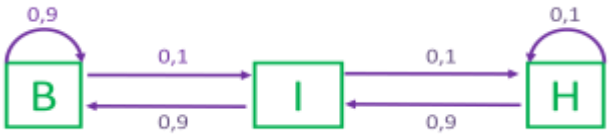
Problème 1 : Bonus et malus en assurance automobile

Un contrat d'assurance automobile comporte trois tarifs de cotisation annuelle : Bas, Intermédiaire, Haut.

- La première année, l'assuré paye le tarif intermédiaire.
- S'il n'a pas été responsable d'un accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante (s'il est déjà au tarif bas, il y reste).
- S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante (s'il est déjà au tarif haut, il y reste).

La compagnie d'assurance estime à 10 % la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'un accident au cours d'une année.

Quelle sera à long terme la répartition des assurés entre les trois catégories de tarif ?



$$\begin{cases} b_{n+1} = 0,9b_n + 0,9i_n \\ i_{n+1} = 0,1b_n + 0,9h_n \\ h_{n+1} = 0,1i_n + 0,1h_n \end{cases}$$

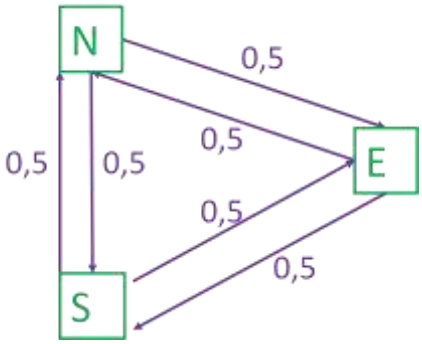
Répartition stable : $b = \frac{81}{91} \approx 0,890, \quad i = \frac{9}{91} \approx 0,099, \quad h = \frac{1}{91} \approx 0,011$

Problème 2 : Une ronde sur un triangle

Nous sommes au XIVe siècle, dans le château de Poitiers.
Il est triangulaire, flanqué d'une tour à chaque angle : Est, Nord, Sud.
Partant de la tour Est, la sentinelle fait sa ronde sur le rempart. A chaque angle, pour tromper l'ennemi (et l'ennui), il jette une pièce :

- pile, il continue dans le même sens ;
- Face, il repart en sens inverse.

Pourra-t-il assurer une surveillance identique dans toutes les directions ?

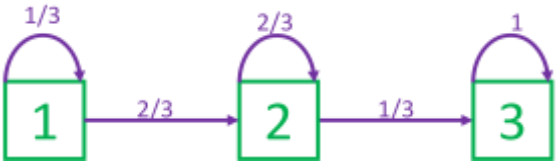


$$\begin{cases} e_{n+1} = 0,5v_n + 0,5s_n \\ v_{n+1} = 0,5e_n + 0,5s_n \\ s_{n+1} = 0,5e_n + 0,5v_n \end{cases}$$

Répartition stable : $e = v = s = \frac{1}{3}$

Problème 3 : Les autocollants des tablettes de chocolat

Chaque semaine, Anna achète une tablette de chocolat Cébon. Chaque tablette contient un autocollant représentant soit une étoile, soit un cœur, soit un trèfle à quatre feuilles. Anna les collectionne pour décorer son journal intime.
En supposant les trois motifs équirépartis entre les tablettes, ***combien de tablettes suffit-il d'acheter pour être sûr à plus de 95 % d'avoir les trois types de dessin ?***



$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \\ d_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}d_n \\ t_{n+1} = \frac{1}{3}d_n + t_n \end{cases}$$

Répartition stable : u = 0, d = 0, t = 1.
D'après la 3e relation, la suite (t_n) est croissante. Or $t_{10} < 0{,}95 < t_{11}$.
Donc, à partir de 11 achats, on est sûr à plus de 95 % d'avoir les trois types de dessin.

Un peu de théorie

Une chaîne de Markov est une suite d'épreuves aléatoires où les états possibles sont donnés et la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.
On peut représenter une chaîne de Markov comme une **marche (promenade) aléatoire sur un graphe** :
- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.

Après avoir ordonné les états, on peut lui associer une **matrice de transition** T (*deux conventions possibles*).
Si P_n est la matrice *colonne* indiquant la répartition de probabilité à l'étape n, le théorème des probabilités totales permet d'écrire $\mathbf{P_{n+1} = T\,P_n}$.
Théorème de Perron-Frobenius : Si T admet une puissance sans aucun coefficient nul, alors :

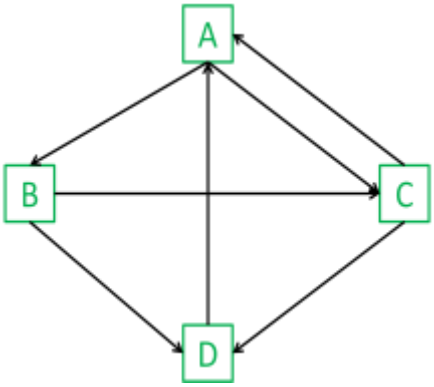
- Il existe une répartition de probabilité P *stable*, c'est-à-dire telle que TP = P, et une seule ;
- La suite (P_n) converge vers P.

Problème 4 : Pertinence d'une page web

Le réseau Internet peut être représenté comme un gigantesque graphe (non probabiliste), dont les N sommets sont les *pages*, et les flèches les *liens* qui pointent d'une page à une autre.
Un moteur de recherche, pour être utile, doit classer les pages par ordre de pertinence.
Comment mesurer la pertinence d'une page ?

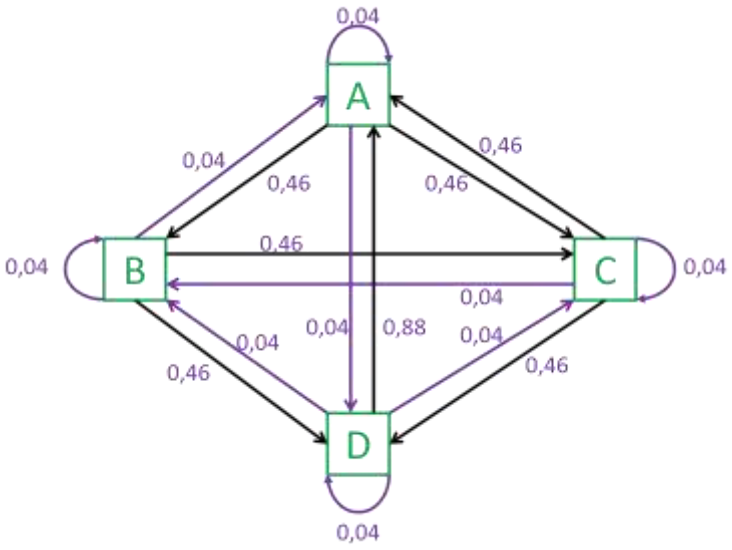
Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard.
Quand il est sur une page,

- Soit, avec une probabilité 1-p, il clique au hasard sur l'un des liens disponibles depuis cette page ;
- soit, avec une probabilité p, il choisit une page au hasard dans l'ensemble du réseau.



Exemple : un mini-web à 4 pages (ci-contre)

Prenons p = 0,16. Cela permet de transformer le graphe initial en graphe probabiliste :



$P_{20} \approx \begin{pmatrix} 0,337 \\ 0,181 \\ 0,258 \\ 0,224 \end{pmatrix} \approx P$. Donc A > C > D > B.

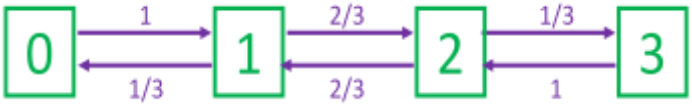
Problème 5 : Les urnes d'Ehrenfest

On dispose de deux urnes A et B, et de N boules numérotées de 1 à N. Au début, toutes les boules sont dans l'urne A. À intervalles réguliers, on tire au hasard un numéro entre 1 et N, et *on change d'urne* la boule correspondante.

Au bout de combien d'étapes peut-on espérer que toutes les boules soient à nouveau dans l'urne A ?

Etudions le cas où **N = 3**

Pour décrire la répartition des boules entre les deux urnes, il suffit d'étudier le **contenu de l'urne A**.



Répartition stable : z = 1/8 u = 3/8 d = 3/8 t = 1/8.

Espérance du temps de retour à l'état initial : 1/t = 8.

Dans le **cas général de N boules**, c'est 2^N.