Document 1 : Extrait d'un cahier de bord de recherche d'un groupe de 4 élèves de terminale scientifique, spécialité mathématique en avril 2012.

SEANCE 1 : Mardi 13 mars 2012

Travail individuel

<u>Consignes :</u>

1. S'engager individuellement dans la résolution du problème (environ 1h).

2. Préparer une synthèse de votre recherche à exposer aux autres élèves de votre groupe (environ 15min).

3. Mettre en commun les différentes synthèses individuelles (environ 30 min).

~~$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \iff a, b$ et c ne sont pas tous égaux~~

~~car $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ et $\frac{3}{x} \neq \frac{4}{n}$~~

Ceci est faux a, b et c peuvent être égaux.

Je cherche plusieurs exemples qui fonctionnent pour chercher un lien entre a, b, c et n

$\frac{4}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ $\qquad$ $\frac{4}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{4}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \iff \frac{4}{n} = \frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc} \iff$$

$$\frac{4}{n} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \qquad bc + ac + ab \overset{?}{\not\equiv} 0\ (4)$$

$bc + ac + ab \not\equiv 0\ (4)$ car $\frac{4}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$4 = \frac{(bc + ac + ab)n}{abc}$ d'où $(bc + ac + ab)n \equiv 0\ (4)$

Travail de groupe

$$\frac{(bc+ac+ab)n}{abc} = 4 \qquad \begin{aligned} 4abc &= bc+bc+ab/n \\ 8abc &= 2(bc+ac+ab)n \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

Ainsi si n est pair il existe 3 naturels a, b, c tel que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{n}$
et $a = b$ et $c = \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$

$$\frac{4}{2k+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$(bc+ac+ab)n = 4abc$ or $n = 2k+1$ donc

$bc+ac+ab \equiv 0(4)$

et d'après le théorème de Gauss $abc \equiv 0(n)$

SEANCE 1 : Mardi 13 mars 2012

Synthèse du travail individuel

J'ai d'abord tenté de démontrer que a, b et c ne pouvait pas être égaux mais ça n'a pas marché car c'est possible

J'ai cherché un lien entre a, b et c à l'aide d'exemple, sans succès

J'ai tenté d'écrire $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ sous forme différente en mettant $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ sous le même dénominateur.

J'ai cherché un lien entre abc et n avec les congruences et un lien entre $bc+ac+ab$ et 4 avec le même outil.

SEANCE 2 : Mardi 20 mars 2012

Travail collectif groupe

Consignes :

1. Reprendre en groupe la recherche du problème (environ 1h30).

2. Rédiger une synthèse de vos recherches dans le cahier de bord du groupe qui servira pour la poursuite du travail collectif la semaine suivante (environ 30 min).

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{n} + \frac{2}{2n} = \frac{3}{n} + \frac{1}{n} = \frac{4}{n}$$

Il nous reste à démontrer pour $n \equiv 1 (6)$ ou $n \equiv 5 (6)$

car on a démontré pour $n \equiv 0 (2)$ et $n \equiv 0 (3)$

on pose $n = 5$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$4/5 = 0,8$

$0,8 = 0,3 + 0,3 + 0,2$

$0,8 = 0,5 + 0,2 + 0,1$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{10} + \frac{1}{25} + \frac{1}{50}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2}{5}n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{5}{2n} + \frac{2}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{8}{2n} = \frac{4}{n}$$

SEANCE 3 : Mardi 27 mars 2012

Travail collectif groupe

Consignes :

1. Reprendre en groupe la recherche du problème (environ 1h45).

2. Rédiger une synthèse de vos recherches dans le cahier de bord du groupe qui servira pour la poursuite du travail collectif la semaine suivante (environ 15min).

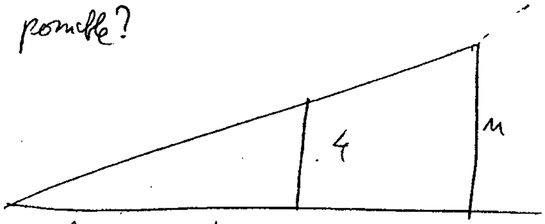
groupe 1 : travailler par congruence (modulo 2) $\frac{4}{n} \Rightarrow \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$(n \equiv 0(3))$ $\frac{4}{3k} = \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} = \frac{1}{6k} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{k}$

voir si $a = b = c = k$ possible ?

$$\frac{AB + AC + bC}{ABC} \Leftrightarrow$$



$n > 4$

$$\frac{AB + AC + bC}{ABC}$$

$\frac{4}{n}$ $\frac{}{4}$ +

groupe 3 :

$$\frac{4}{7k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{14k}$$

$$\frac{4}{27} = \frac{1}{6} + \frac{1}{138} = \frac{1}{6} + \frac{1}{276} + \frac{1}{276}$$

$$\frac{4}{29} = \frac{1}{8} + \frac{3}{232} = \frac{1}{8} + \frac{1}{232} + \frac{1}{232}$$

$$\frac{4}{457} = \frac{1}{115} + \frac{3}{52555} = \frac{1}{115} + \frac{1}{105110} + \frac{5}{105110}$$

En recherche

$$4abc = n(ab + bc + ac)$$

$4 \wedge n = 1$ d'où $\begin{cases} 4 \mid ab + bc + ac \\ n \mid abc \end{cases}$

il y a donc 4 cas si on compte la symétrie entre ab, bc et ac

$ab+bc+ac \equiv 0+0+0 \equiv 0\ (4)$

$ab+bc+ac \equiv 2+2+0 \equiv 0\ (4)$

$ab+bc+ac \equiv 1+2+1 \equiv 0\ (4)$

$ab+bc+ac \equiv 1+3+0 \equiv 0\ (4)$

$abc \equiv 0\ (4)$

$abc \equiv 0\ (4)$

$abc \equiv 0\ (4)$

$$\begin{cases} ab \equiv 1\ (4) \\ bc \equiv 1\ (4) \\ ac \equiv 2\ (4) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} abc \equiv c\ (4) \\ abc \equiv a\ (4) \\ abc \equiv 2b\ (4) \end{cases} \Longrightarrow a \equiv c \equiv 2b\ (4)$$

$ab \equiv 1\ (4)$ — $a \equiv 1 (4)$ et $\cancel{b \equiv 1 (4)}$ ou $a \equiv \cancel{3 (4)}$ et $b \equiv 3 (4)$

$ac \equiv 2\ (4)$ — $a \equiv 2 (4)$ $\cancel{\text{et } c \equiv 1 (4)}$ ou l'inverse

$a \equiv 3 (4)$ et $c \equiv 2 (4)$ ou ~~l'inverse~~

$bc \equiv 1\ (4)$ — $c \equiv 1 (4)$ $\cancel{\text{et } b \equiv 1 (4)}$ ou $c \equiv 3\cancel{(4) \text{ et}}$ $b \equiv 3 (4)$

Or $a \equiv c \equiv 2b\ (4)$ on supprime donc les cas X

C'est impossible d'où $abc \equiv 0 (4)$ (abc n'est pas une puissance de 2)

$(bc+ac+ab)\, n = 4abc$

D'après le théorème de Gauss $bc+ac+ab \equiv 0 (16)$

Si $n \wedge 4 = 1$ alors $n \equiv 1 (2)$

$n \equiv 1(2) \iff n \wedge 4 = 1$

$n \equiv 1 (2)$ alors $n \wedge 4 = 1$

~~n divise abc donc n = abck~~

~~(bc + ac + ab) ... = 4abc~~

~~$(bc+ac+ab)k = 4$~~

~~$4 = 16k'k$~~ ~~$k'k = \frac{1}{4}$~~ faux

on élimine abc donc $abc = nk$

$(bc+ac+ab)k = 4nk$

$(bc+ac+ab) = 4k$

$16k' = 4k$

$4k' = k$

$$\begin{cases} abc = nk \\ ab+bc+ac = 16k' \\ 4k' = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc = 4k'n \\ ab+bc+ac = 16k' \end{cases}$$

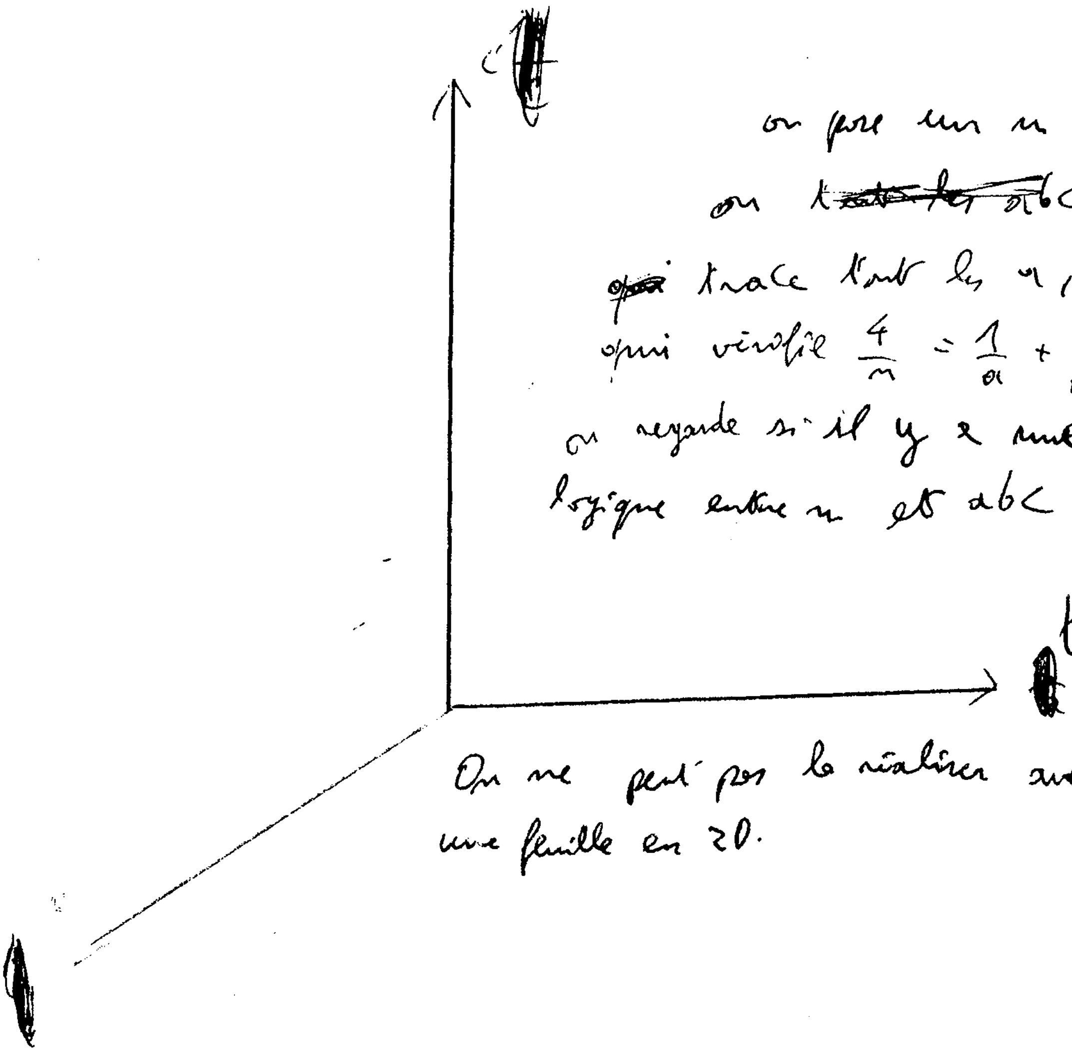
$k' = \frac{ab+bc+ac}{16}$

$abc = \frac{ab+bc+ac}{4} \times n$

$$n = \frac{4abc}{bc+ac+ab} = \frac{4 \times 4q}{16k'} = \frac{q}{k'}$$

$$\begin{cases} 4k' = k \\ \frac{q}{k'} = n \end{cases}$$

modélisation de la courbe en 3D.



on pose un n et

on ~~trouve les~~ abc

~~qui~~ trace tout les a, b, c

qui vérifie $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

on regarde si il y a une suite logique entre n et abc

On ne peut pas la réaliser avec une feuille en 2D.