

∞ Baccalauréat C Paris juin 1971 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{Log} x},$$

où Log désigne le logarithme népérien.

Préciser le domaine de définition de f , et celui des deux premières dérivées f' et f'' de f .

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Étudier la variation de f et construire sa courbe représentative (C) (repère orthonormé).

Construire la tangente à (C) au point A , d'ordonnée nulle, puis la tangente à (C) au point I , d'abscisse α telle que $f'(\alpha) = 0$.

Montrer que f admet une fonction réciproque g , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$; calculer explicitement $g(x)$.

EXERCICE 2

À tout réel $\lambda \in]0; +1[$ on associe, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy , l'ellipse (E_λ) d'équation

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{\lambda}.$$

1. Déterminer par leurs coordonnées le centre Ω et les sommets de cette ellipse (E_λ) .

Trouver et tracer la courbe S constituant l'ensemble des sommets du grand axe quand λ décrit l'intervalle $]0; +1[$. Préciser la nature de S .

2. Déterminer par leurs coordonnées les foyers de l'ellipse (E_λ) . Trouver et tracer la courbe (Φ) constituant l'ensemble de ces foyers quand λ décrit l'intervalle $]0; +1[$.

PROBLÈME

1. On donne deux nombres complexes non nuls a et s et l'on considère la suite \sum des nombres complexes $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, définie par $z_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$(1) \quad z_{n+1} = sz_n + a, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- a. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 en fonction de a et de s .

Exprimer simplement z_n en fonction de a, s et n , lorsque $s \neq 1$.

Que peut-on dire de \sum lorsque $s = -1$?

Donner la valeur de z_n lorsque $s = 1$.

- b. Deux éléments distincts de \sum peuvent-ils être égaux? Montrer qu'alors \sum est périodique.

- c. Vérifier que deux termes consécutifs de \sum ne sont jamais égaux et montrer que

$$(2) \quad \frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

d. Inversement, soit donnée une suite vérifiant les trois conditions suivantes : deux termes consécutifs ne sont jamais égaux, la relation (2) est satisfaite, les deux premiers termes sont 0 et a . Démontrer qu'une telle suite est confondue avec Σ .

2. Tous les points considérés dans cette question appartiennent à un même plan euclidien, muni d'un repère orthonormé d'axes Ox, Oy (unité : 1 cm). L'affixe d'un point de ce plan, de coordonnées $(x; y)$, est le nombre complexe $z = x + iy$.

Soit θ un angle donné tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et r un nombre réel donné strictement positif.

Si P désigne un point quelconque, on note f_P la similitude de centre P , d'angle θ et de rapport r ; ainsi $f_P(M)$ est le point image de M par f_P . On considère alors la suite \mathcal{A} des points $O, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, tels que, pour tout n ,

$$A_2 = f_O(A_1), A_3 = f_{A_1}(A_2), \dots \text{ et } A_{n+2} = f_{A_n}(A_{n+1}),$$

où O est l'origine et A_1 le point d'affixe a donnée ($a \neq 0$).

a. Si z_n désigne l'affixe de A_n trouver la valeur du rapport

$$\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n}.$$

Déduire alors du **1.** que A_{n+1} est le transformé de A_n dans une similitude S , indépendante de n ; calculer seulement, ici, l'affixe de son centre.

On ne demande d'étudier S que dans les deux cas **b.** et **c.** suivants.

b. On suppose $r = \frac{1}{\cos \theta}$; déterminer l'angle, le rapport et le centre, U , de S . Vérifier que tous les points A_i appartiennent, selon la parité de i , à l'une ou l'autre de deux droites fixes.

Comment faut-il choisir θ pour que la suite \mathcal{A} soit périodique?

Construire le point U et la ligne polygonale

$$OA_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

pour

$$a = 5 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\theta}{6}$$

c. On suppose $r = 2 \cos \theta$; montrer que S est une rotation, dont on déterminera l'angle et le centre V .

Qu'en déduit-on pour les côtés de la ligne polygonale L de sommets successifs

$$O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6?$$

Comment faut-il choisir θ pour que L soit fermée?

Construire le point V et la ligne L pour

$$a = 5 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\pi}{7}.$$