Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Entraînement 2024 – Solutions

Partie Problèmes

Chaque niveau doit résoudre la série des 6 problèmes indiquée dans le tableau ci-dessous.

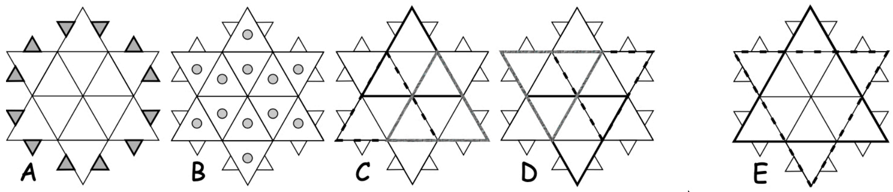
Classes	CM	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$-2^{nde} pro	2^{nde}
Problèmes	1 à 6	4 à 9	7 à 12	10 à 15	13 à 18	16 à 21

1. Suite musicale

LA, SI, DO, RÉ, **MI**
L, M, N, O, **P**
1, 3, 5, 7, **9**
T, V, T, V, **T**

Le cinquième terme est donc **MIP9T**.

2. Flocon du Rallye en triangles

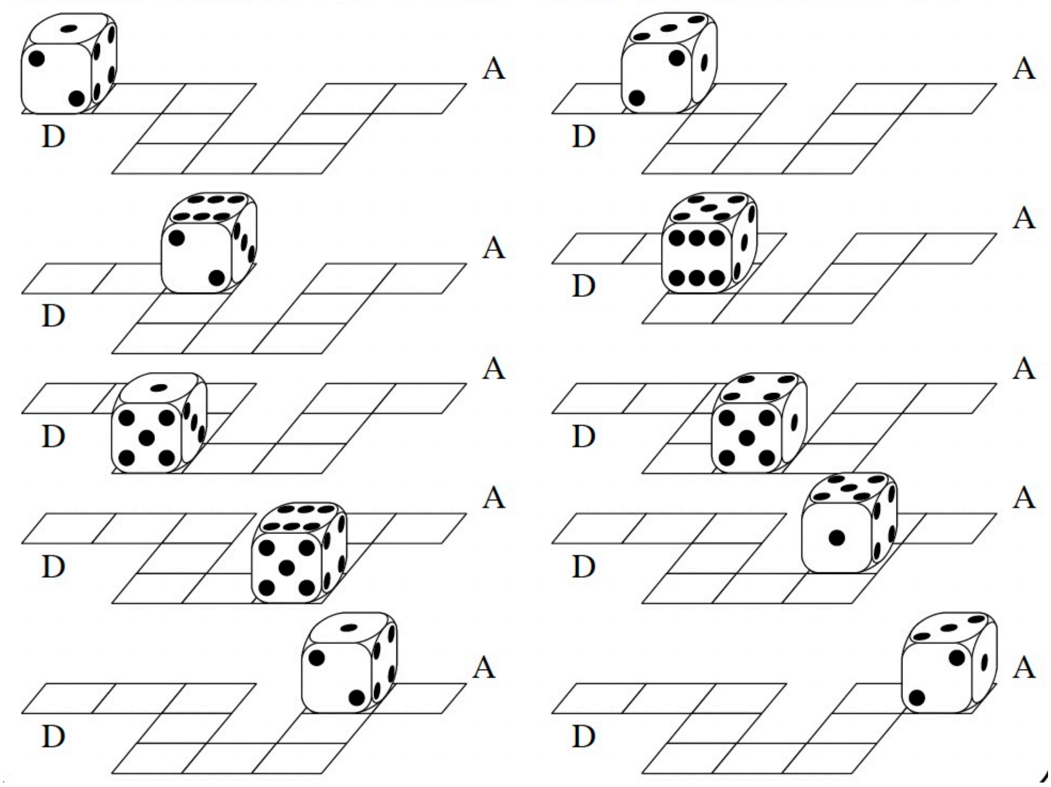


A : 12 petits triangles de côté 1/3
B : 12 triangles de côté 1
C : 3 triangles de côté 2
D : 3 triangles de côté 2 (symétriques des précédents)
E : 2 triangles de côté 3.

Il y a donc 32 triangles.

3. Dés, Roulez !

Il existe deux répartitions des points sur les faces d'un dé : les deux dés obtenus sont images l'un de l'autre dans un miroir. Une bonne stratégie consistait à prendre un dé, avec la bonne répartition des points sinon d'en fabriquer un, et à le faire tourner sur le circuit aux bonne dimensions.
Voici quelques étapes du dé sur le circuit. À l'arrivée, la face du dessus est le 3.



4. Petites pièces

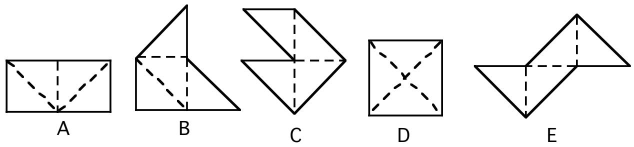
Pour deux centimes, **deux façons** : 2 ou 1+1
Pour cinq centimes, **quatre façons** : 5 ; 1+2+2 ; 1+1+1+2 ; 1+1+1+1+1.
Pour sept centimes, **six façons** : 5+2 ; 5+1+1 ; 2+2+2+1 ; 2+2+1+1+1 ; 2+1+1+1+1+1 ; 1+1+1+1+1+1+1.

5. À mon compteur

Le compteur kilométrique de ma voiture marque 257649.
De 1 à 10 km supplémentaires, le chiffre des dizaines devient 5, et il est déjà présent : 2**5**7649
De 11 à 20 km supplémentaires, le chiffre des dizaines devient 6, déjà présent : 257**6**49
De 21 à 30 km supplémentaires, le chiffre des dizaines devient 7, déjà présent : 25**7**649
En ajoutant **31 km**, le compteur marque **257680**. Ce nombre a ses chiffres tous différents et c'est la première fois.

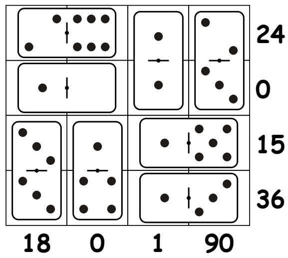
6. Trouvez la paire

Les périmètres des six figures comprennent deux longueurs de côtés : p pour le petit côté et g pour le grand. On peut exprimer chaque périmètre en fonction de p et g et on observe que ce sont **C et E** qui ont le même périmètre : 2p + 4g. Ce sont les deux figures qui ont le plus grand périmètre !



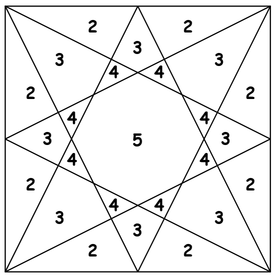
7. « Produiminos »

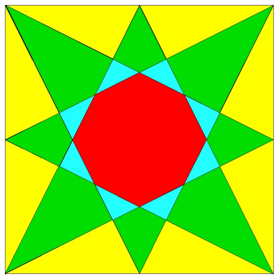
Nécessairement, la troisième colonne ne contient que des 1 et on a un 0 à l'intersection de la deuxième ligne et de la deuxième colonne.
Plusieurs solutions sont possibles.



8. Un carré étoilé

Les nombres de couches sont donnés dans le premier dessin. Pour les établir, on peut aussi considérer le nombre de triangles qui ne recouvrent pas chaque zone. Des élèves ont utilisé un calque en coloriant différemment les quatre triangles pour bien observer la superposition des couches.





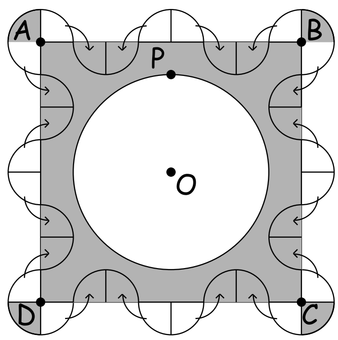
9. Plainte contre X

L'égalité $\boxed{24 : X = ...}$ laisse à penser que l'on cherche un diviseur de 24, soit : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ou 24. La somme devant être 196, un calcul mental sur les ordres de grandeur permet d'éliminer rapidement 1, 2, 12 et 24. Des tests avec les autres diviseurs permettent d'aboutir à **6**.

24	**–**	**X**	**=**	**18**
24	**+**	**X**	**=**	**30**
24	**x**	**X**	**=**	**144**
24	**:**	**X**	**=**	**4**
Somme			**=**	**196**

10. Léonard encadré

Il y a trois diamètres et deux rayons de demi-disques sur un côté du carré de 80 cm, soit huit rayons de 10 cm. Il y a 10 demi-disques extérieurs et 8 demi-disques intérieurs au carré ; par compensation, il y a 1 petit disque extérieur au carré.
Autre méthode : comme le montre le dessin, les quarts de petits disques extérieurs et intérieurs se compensent deux à deux. Il reste quatre quarts de disques extérieurs au carré.
L'aire de la partie grisée est donc la somme des aires du carré et d'un petit disque, à laquelle il faut ôter l'aire du disque de rayon OP. Après calculs, on trouve environ **3887 cm²** (3888 avec π ≈ 3,14).



11. Objectif 20 !

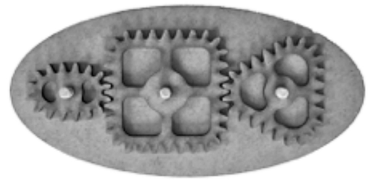
Voici des solutions :

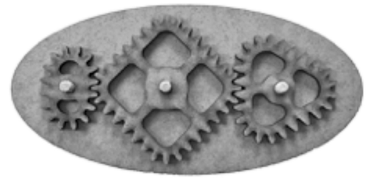
2 x 2 x 2 x 2 + 2 + 2 = 20 ;
(3 + 3) x 3 + (3 + 3) : 3 = 20 :
4 x 4 + 4 = 20 ;

5 x 5 – 5 = 20 ;
6 + 6 + 6 + (6 + 6) : 6 = 20 ;
7 + 7 + 7 – (7 : 7) = 20 ;

8 + 8 + (8 x 8) : (8 + 8) = 20 ;
et (élèves) 8 + 8 + 8 : [(8 + 8) : 8]
9 + 9 + (9 + 9) : 9 = 20

12. Engrenage





1°) La roue triangulaire a 24 dents.
24 = 16 + 8 et 8 = 16 : 2. La roue ovale fait donc **un tour et demi**.
24 = 32 – 8 et 32 = 4 x 8. La roue carrée fait donc **trois quarts de tours**.

2°) Lorsqu'on reviendra à la disposition initiale des roues, les roues auront fait un nombre entier de tours et auront toutes tourné d'un même nombre de dents. Ce nombre est le plus petit multiple de 16, 32 et 24, soit 96.
La **roue carrée** aura donc fait **trois tours**, la **roue ovale** aura fait **six tours** et la **roue triangulaire** aura fait **quatre tours**.

En utilisant la calculatrice :

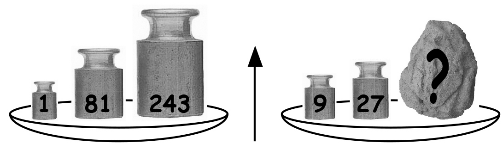
1°) 24/16 = 1,5 et 24/32 = 0,75 = 3/4 ; donc 1,5 tours pour la roue ovale et 0,75 tour pour la roue carrée.

2°) On compte successivement le nombre de dents correspondant à un nombre entier de tours de roue carrée pour obtenir des nombres entiers de tours des autres roues :

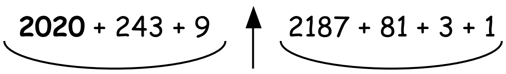
Roue carrée	Roue ovale	Roue triangulaire
1 tour : 32 dents	32/16 = 2	32/24 = 1,33333…
2 tours : 64 dents	64/16 = 4	64/24 = 2,66666…
3 tours : 96 dents	96/16 = 6	96/24 = 4

13. C'est une question d'équilibre !

On dispose d'une balance à double plateau et de huit masses de 1 g, 3 g, 9 g, 27 g, 81 g, 243 g, 729 g et 2187 g, une de chaque.
1°) À l'aide de ces masses on a équilibré un objet. Quelle est la masse de cet objet ?
2°) Pourriez-vous équilibrer un objet de 2020 g ?



1°) 243 + 81 + 1 – 27 – 9 = 289. L'objet pèse 289 g.
2°) Solution ci-contre. Démarche ci-dessous.



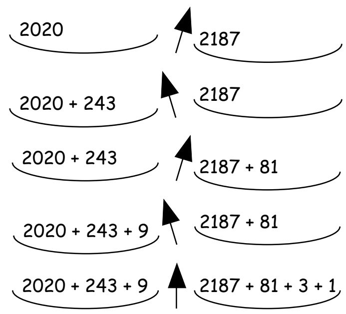
On met 2187 g à droite ; 2187 – 2020 = 167. On dépasse de 167 g.

On ajoute 243 g à gauche : (2020 + 243) – 2187 = 76. On dépasse de 76 g.

On ajoute 81 g à droite : (2187 + 81) – 2263 = 5 g. On dépasse de 5 g.

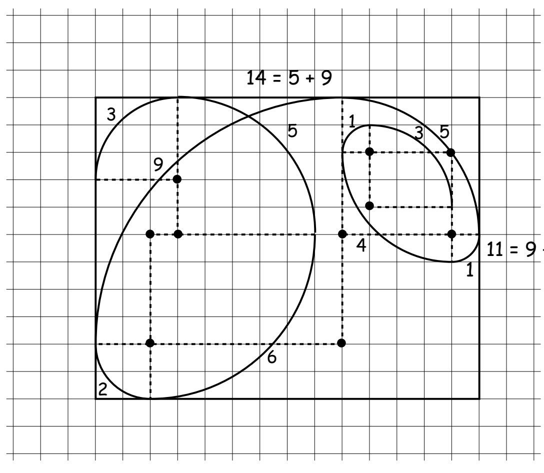
On ajoute 9 g à gauche : (2263 + 9) – 2268 = 4 g. On dépasse de 4 g.

Il suffit alors d'ajouter 3 + 1 = 4 à droite, et on obtient l'équilibre.



14. Sπrale

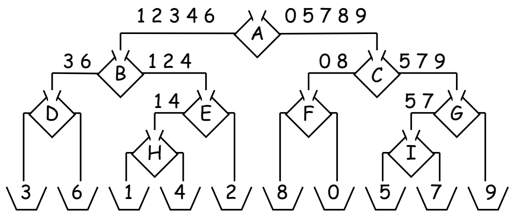
1°) Dessin ci-contre.
2°) Dimensions du rectangle : 14 et 11.



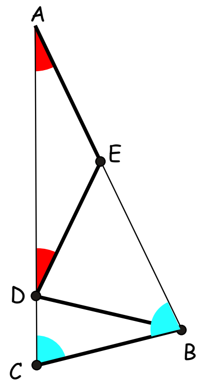
15. Une trieuse arithmétique

A : est un diviseur de 12
B : est un multiple de 3
C : est un nombre pair
D : est un diviseur de 15
E : est un carré d'entier

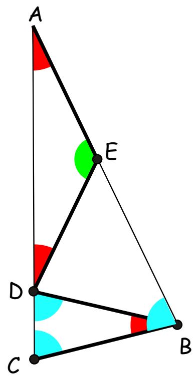
F : est un diviseur de 24
G : est un nombre qui ne possède que deux diviseurs
H : est un diviseur de 30
I : est un diviseur de 10



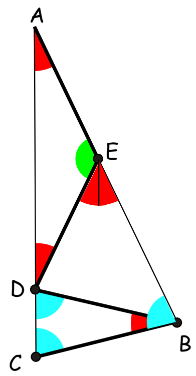
16. Triangle d'allumettes



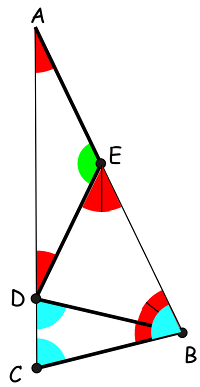
BAC isocèle en A et AED isocèle en E



DBC isocèle en B et donc l'angle B égale l'angle A.



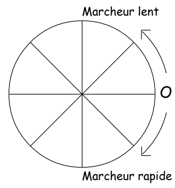
En E, les angles sont supplémentaires. L'angle E du triangle BDE est donc le double de l'angle A.



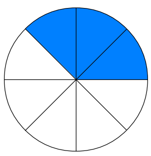
Le triangle BDE est isocèle en D. Dans le triangle BAC, l'angle B est égal à trois fois l'angle A.

La somme des angles du triangle BAC de 180° est égale à sept fois l'angle A.
La valeur exacte de l'angle A est donc **180°/7**.
On peut donc accoler 14 triangles identiques autour du point A ; le polygone obtenu a **14 côtés**.

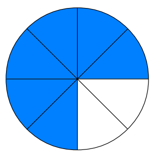
17. Deux marcheurs



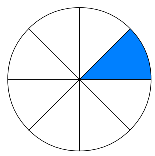
On choisit l'un des marcheurs et on compte combien de fois il croise l'autre.
Si on choisit le plus rapide, lorsqu'il fait un tour l'autre fait 3/8 de tour. Au départ, les deux marcheurs sont en O. On peut suivre leurs croisements sur les schémas ci-dessous



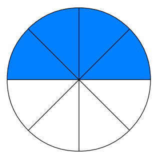
Au bout d'un tour du plus rapide, l'autre a parcouru 3/8 de tour : ils se sont croisés une première fois.



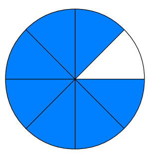
Au bout de deux tours du plus rapide, l'autre a parcouru 6/8 de tour : ils se sont croisés une deuxième fois.



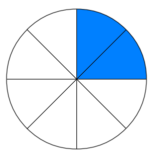
Au bout de 3 tours du plus rapide, l'autre a fait un tour et 1/8 de tour : ils vont donc se croiser deux fois de plus. Soit 4 croisements.



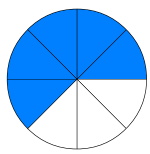
Au bout de 4 tours du plus rapide, l'autre a fait un tour et 1/8 + 3/8 de tour : il se croiseront donc une fois de plus.
Soit 5 croisements.



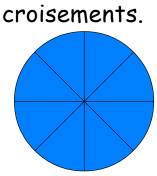
Après 5 tours du plus rapide, 6 croisements.



Après 6 tours du plus rapide, 2 croisements de plus. Soit 8 croisements.



Après 7 tours du plus rapide, 9 croisements.



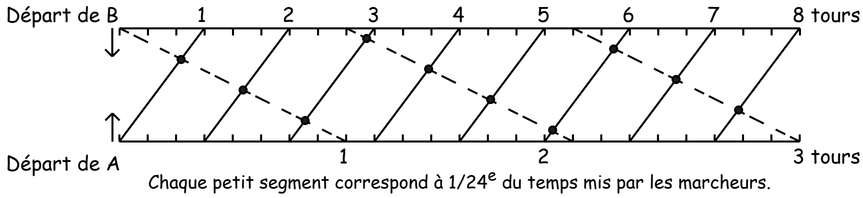
Après 7 tours du plus rapide, 10 croisements.

Autre solution

Au premier croisement, ils ont fait 1 tour à eux deux, au deuxième croisement, ils ont fait 2 tours à eux deux et ainsi de suite. Comme ils font 11 tours à eux deux, ils ont donc fait 10 croisements, le onzième étant le point d'arrivée.

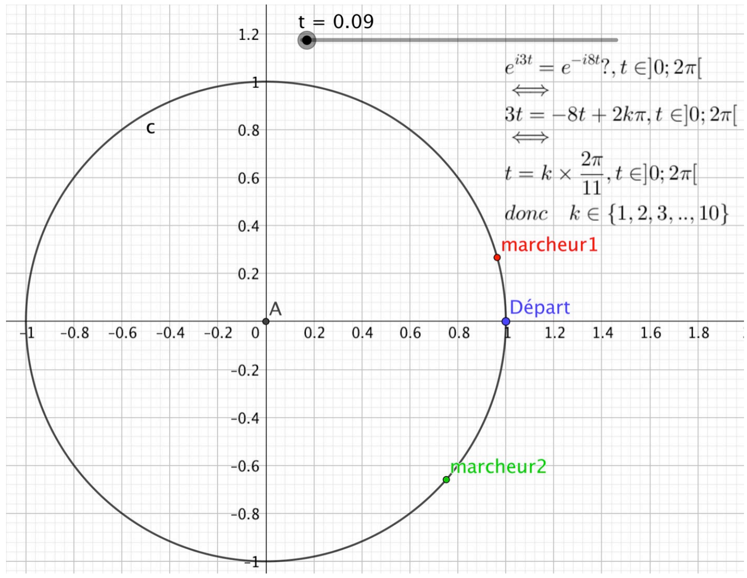
Une méthode graphique

Si A désigne le marcheur qui fait 8 tours de stade (traits pleins) et B le marcheur qui en fait 3 (traits pointillés), on obtient le nombre de croisements avec le graphique ci contre, soit **10**.



Chaque petit segment correspond à 1/24^{e} du temps mis par les marcheurs.

Solution dynamique
avec Geogebra
(*fichier téléchargeable en ligne*)



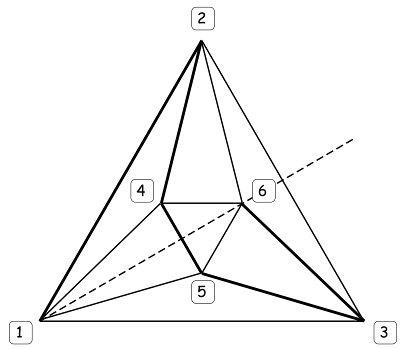
19. Alea jacta est

Puisque l'on part du 1, en faisant pivoter le dé, on ne peut obtenir que le 2, le 3, le 4 ou le 5 (pas le 6 qui est sur la face opposée). On a donc quatre possibilités ; au coup suivant, on n'a plus que deux possibilités car on ne peut pas faire tourner le dé vers le 1 ou le 6 et, à partir du troisième mouvement, on n'a plus qu'une seule possibilité.
On trouve donc en tout huit suites : (1,2,3,5,4,6), (1,2,4,5,3,6), (1,3,2,4,5,6), (1,3,5,4,2,6), (1,4,2,3,5,6), (1,4,5,3,2,6), (1,5,4,2,3,6), (1,5,3,2,4,6).

Pour faire cet exercice, le plus simple était d'utiliser ou de confectionner un dé.

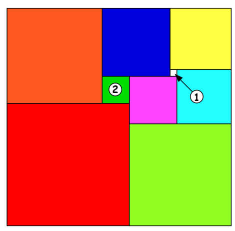
Dans cette représentation du cube, les sommets sont les faces du dé et les arêtes indiquent que deux faces ont une arête en commun.
On est donc amené à chercher tous les chemins qui partent de 1, passent une fois par tous les autres nombres et se terminent par le 6. L'un des chemins a été tracé.

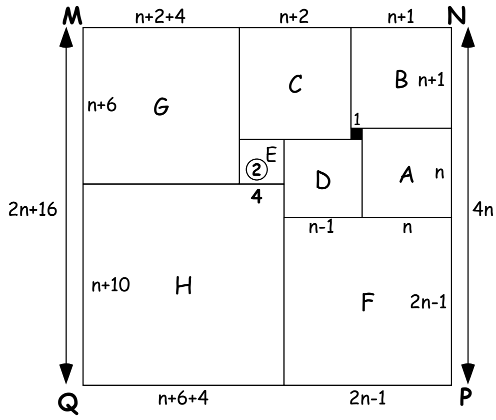
Remarque : *l'axe reliant le 1 au 6 est un axe de symétrie de la configuration. À chaque chemin-solution correspond son symétrique qui est aussi une solution.*



20. Carrément joli

Carl Heur a dessiné un nouveau type de dalle colorée.
C'est un rectangle presque carré ; en effet la longueur et la largeur ne présentent qu'un seul centimètre d'écart. Il est composé de neuf carrés tous différents dont les côtés sont tous mesurés par un nombre entier de centimètres. Si la longueur du côté du carré 1 est 1 cm, quelle est celle du carré 2 ? Et maintenant pouvez-vous donner les dimensions de cette dalle ?

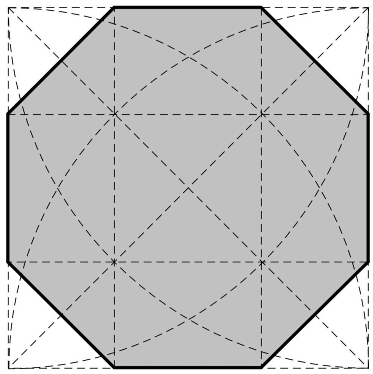




1°) Soit n le côté du carré A ; on notera A(n).
On a alors B(n+1), C(n+2), D(n-1) et F(2n-1).
Le côté du carré E est donc : 2n+3 – (2n-1) = 4. On a donc **E(4)**.

2°) On en déduit G(n+6) et H(n+10). Le côté NP mesure 4n et le côté MQ mesure 2n+16. Donc 4n = 2n+16, soit n = 8.
Les côtés du rectangle sont donc **MN = 33 cm et NP = 32 cm**.
On a alors les côtés des carrés :
A(8), B(9), C(10), D(7), E(4), F(15), G(14) et H(18).

21. À la romaine



Par raison de symétrie, l'aire enlevée du carré pour constituer l'octogone est celle de quatre triangles rectangles isocèles, soit celle de deux carrés identiques au carré situé dans le coin supérieur gauche. Si l'on appelle *a* la longueur du côté du grand carré, ce petit carré a pour longueur de diagonale $(\sqrt{2}-1)\,a$. La longueur du côté du petit carré est égale à sa diagonale divisée par $\sqrt{2}$. Cette longueur est donc $\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)a}{\sqrt{2}} = \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a$.

L'aire à retrancher est donc $2\times\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a^2 = \left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$. L'octogone a une aire de $a^2-\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2 = \left(2\sqrt{2}-2\right)a^2$. L'octogone occupe donc un pourcentage de $2\sqrt{2}-2$, soit, arrondi à l'unité, **83 %** de l'aire du carré.

18. Le travelator

Lorsque Alphonse prend le travelator dans le sens de la marche, sa vitesse s'ajoute à celle du travelator ; lorsque il prend le travelator dans le mauvais sens, la vitesse du travelator se retranche de la sienne (puisqu'il arrive à revenir au pied du tapis, c'est que sa vitesse est plus grande que celle du travelator). La vitesse d'Alphonse est $u=\dfrac{5}{9}$ m/s. Puisque la distance parcourue est le produit de la vitesse par le temps, on a donc les deux équations (en appelant *v*, la vitesse inconnue du travelator, D sa longueur que nous cherchons et, en remarquant que 2 min 6 s équivaut à 126 s) :

$D=\left(v+\dfrac{5}{9}\right)\times 18=\left(\dfrac{5}{9}-v\right)\times 126$; on en déduit que 18 v + 10 = 70 - 126 v, 144 v = 60 et donc $v=\dfrac{5}{12}$ m/s.

La longueur du travelator est donc $D=\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{5}{9}\right)\times 18=\dfrac{35}{2}$ soit **17,5 m**.