❧ Baccalauréat S 2015 ❧

L'intégrale d'avril 2015 à mars 2016

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

À la fin index des notions abordées

À la fin de chaque exercice cliquez sur * pour aller à l'index

∽ Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

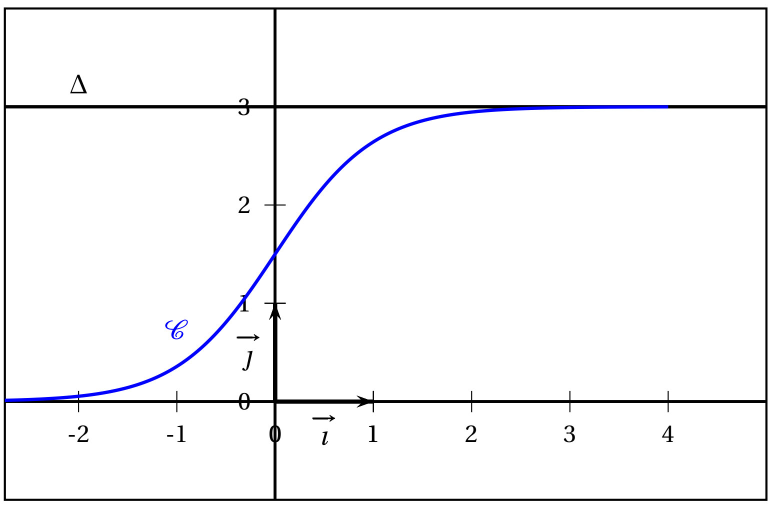
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.

   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.*

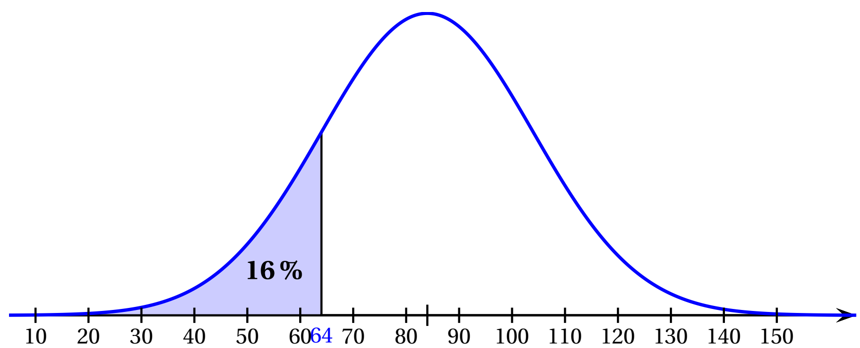
EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. **a.** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
   b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
   b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
   c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
   Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
   a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
   b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
   a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.

On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise? Justifier.*

EXERCICE 4 — 5 points

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\mathrm{M}\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $\mathrm{N}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $\mathrm{P}\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$.

En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme? Qu'en déduire pour le triangle MNP?

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}(5\,;\,-8\,;\,4)$ normal au plan (MNP).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.

b. On donne $\mathrm{FK} = \sqrt{\frac{27}{35}}$.

Calculer le volume du tétraèdre MNPF.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\,;\,c) = 1$.
   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

   si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
   Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$\left(2^{33}-1\right) \div 3$	2863311530
$\left(2^{33}-1\right) \div 4$	2147483648
$\left(2^{33}-1\right) \div 12$	715827882,6

   Il affirme que 3 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

   a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.** ?

   b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

   c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

   e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD$(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n - 1,\ k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

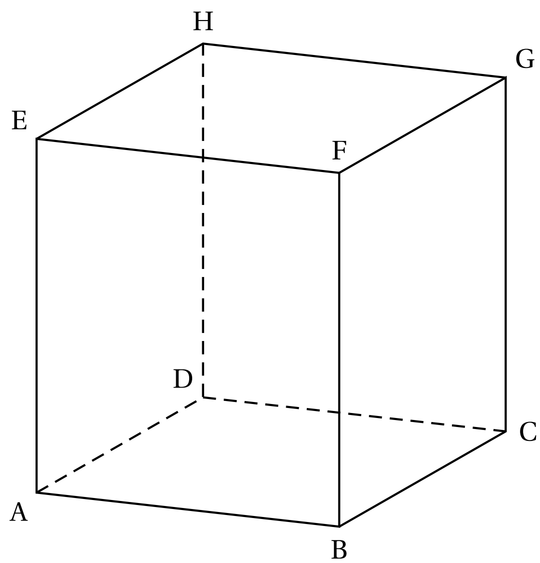
a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?*

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Algorithme 1

Saisir $x_{\text{M}}, y_{\text{M}}, z_{\text{M}}, x_{\text{N}}, y_{\text{N}}, z_{\text{N}}, x_{\text{P}}, y_{\text{P}}, z_{\text{P}}$
d prend la valeur $x_{\text{N}} - x_{\text{M}}$
e prend la valeur $y_{\text{N}} - y_{\text{M}}$
f prend la valeur $z_{\text{N}} - z_{\text{M}}$
g prend la valeur $x_{\text{P}} - x_{\text{M}}$
h prend la valeur $y_{\text{P}} - y_{\text{M}}$
i prend la valeur $z_{\text{P}} - z_{\text{M}}$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

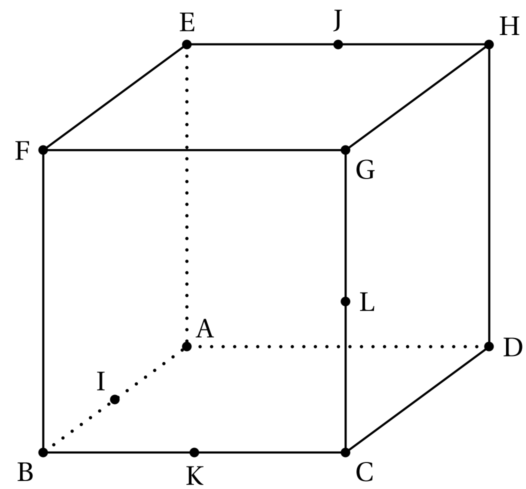
Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_{\text{M}}, y_{\text{M}}, z_{\text{M}}, x_{\text{N}}, y_{\text{N}}, z_{\text{N}}, x_{\text{P}}, y_{\text{P}}, z_{\text{P}}$
d prend la valeur $x_{\text{N}} - x_{\text{M}}$
e prend la valeur $y_{\text{N}} - y_{\text{M}}$
f prend la valeur $z_{\text{N}} - z_{\text{M}}$
g prend la valeur $x_{\text{P}} - x_{\text{M}}$
h prend la valeur $y_{\text{P}} - y_{\text{M}}$
i prend la valeur $z_{\text{P}} - z_{\text{M}}$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

Baccalauréat S Liban 27 mai 2015

EXERCICE 1 **5 points**

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. **a.** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*

EXERCICE 2 **6 points**

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   b. En déduire la valeur exacte de u_1.

3. **a.** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	|Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

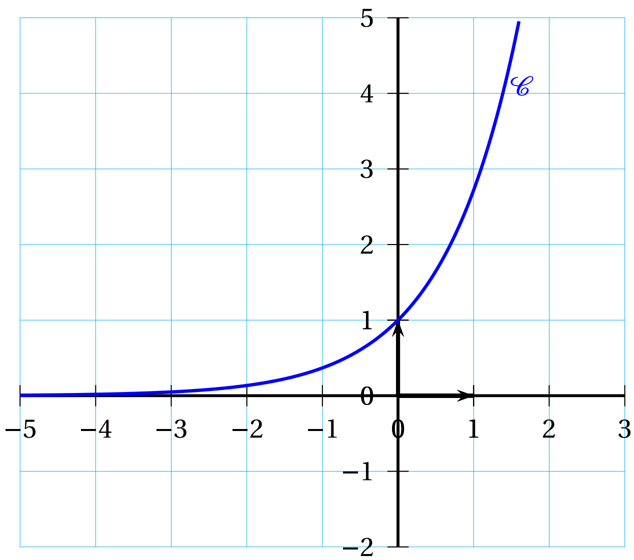
Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.*

EXERCICE 3 — 3 points

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

   Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?
5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.
   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.

2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites $\left(p_n\right)$ et $\left(q_n\right)$. Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites $\left(p_n\right)$ et $\left(q_n\right)$?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par

$$M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,4\\0,1 & 0,6\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}.$$

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n,
$Xn = M^n \times X_0$.

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix}0,8 & 0,8\\0,2 & 0,2\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0,2 & -0,8\\-0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

b. Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?*

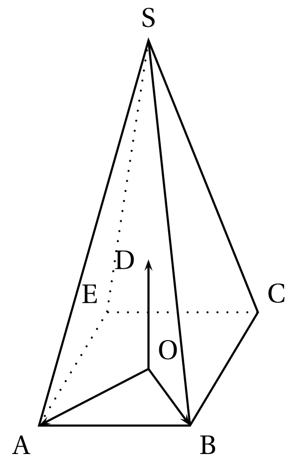
Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord 2 juin 2015

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\text{OA}},~\overrightarrow{\text{OB}},\overrightarrow{\text{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées (0; 0; 3) dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{6}~;~-\dfrac{1}{6}~;~0\right)$.

   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0~;~\dfrac{2}{3}~;~1\right)$.

   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume?*

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lll} x_{n+1} & = & 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,8y_n \end{array}\right.$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

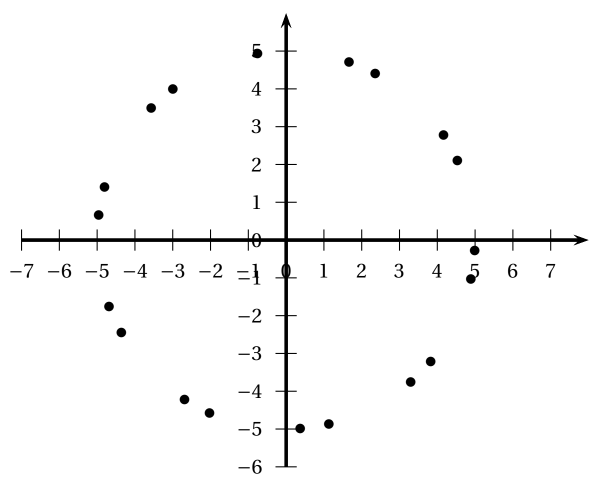
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées (x ; y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ....
        y prend la valeur ....
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point A_n.

a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

d. Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.

Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie).**

Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.*

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(−1 ; −1) et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A$(1 ; p)$, B$(-1 ; q)$ et C$(2 ; r)$.
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation
$y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p\\ q\\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3p+q+2r & \equiv & 0\,[6]\\ 3p-3q & \equiv & 0\,[6]\\ 6p+2q-2r & \equiv & 0\,[6] \end{array}\right.$$

2. En déduire que $\left\{\begin{array}{lcl} q-r & \equiv & 0\,[3]\\ p-q & \equiv & 0\,[2] \end{array}\right.$.

3. Réciproquement, on admet que si $\left\{\begin{array}{lcl} q-r & \equiv & 0\,[3]\\ p-q & \equiv & 0\,[2]\\ \multicolumn{3}{l}{\text{A, B, C ne sont pas alignés}} \end{array}\right.$

   alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

   a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

   b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation
   $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.*

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la tablette est mise sur le marché ».

2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne 0,97.
   Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'évènement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à $0,97$.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents :
le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.
   Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?*

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

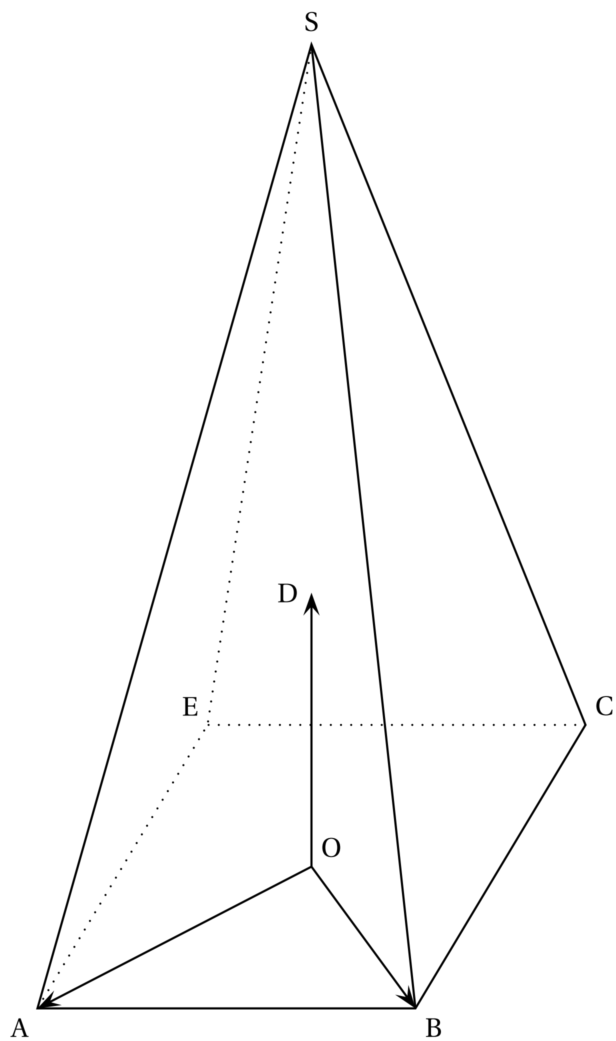
1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

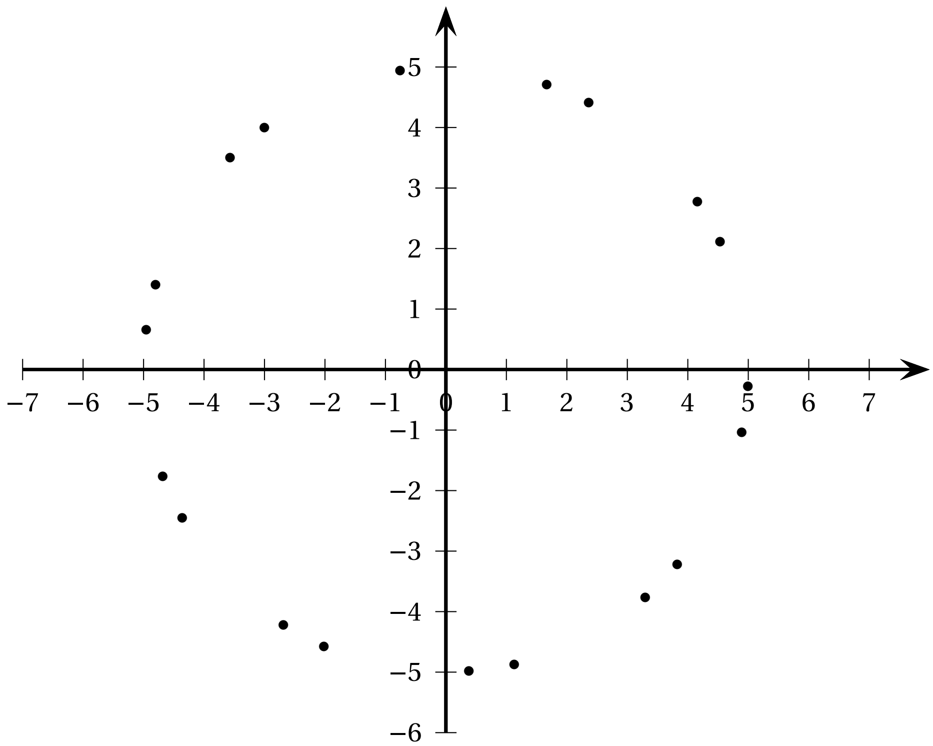
   est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
   $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.*

Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 10 juin 2015

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
   On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

   Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.
Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?

3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.*

Exercice 2 — 4 points

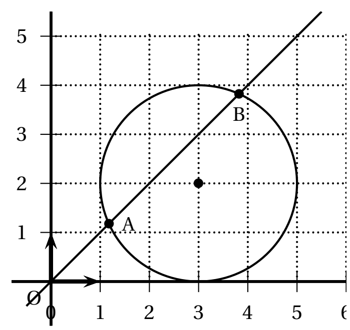
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3 ; 2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$. Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.

Pour les questions 3 *et* 4, *on considère les points* E(2 ; 1 ; - 3), F(1 ; −1 ; 2) *et* G(−1 ; 3 ; 1) *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 7-10t \end{array}\right.$$

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\text{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.*

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \text{e}^{2u_n} - \text{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \text{e}^{u_n}\left(\text{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \text{e}^{2x} - \text{e}^{x} - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\text{e}^{x} - 1\right)\left(2\text{e}^{x} + 1\right)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.*

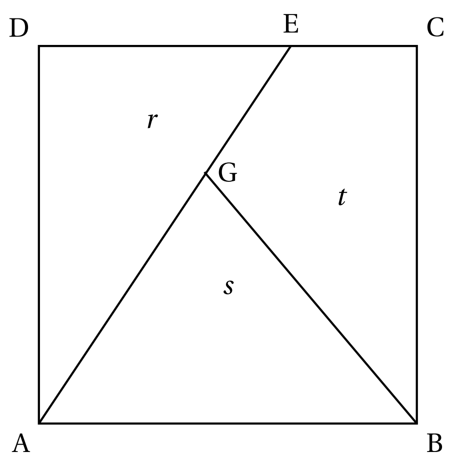
Exercice 4 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

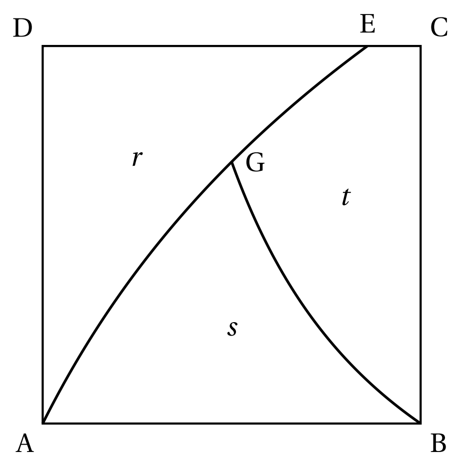
Les parties A et B sont indépendantes

Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :
• Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
 — une des lignes est le segment [AD] ;
 — une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;
 — la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
• Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

• la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$;
• la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. **a.** Déterminer l'abscisse du point E.
   b. Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.
2. **a.** Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$F(x) = (x+0,5)\times\ln(2x+1) - x.$$

   b. Démontrer que $r = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.
3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que
   $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
   La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?*

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi (3, 4, 5) est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n = 2^{\alpha} \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   L'écriture $n = 2^{\alpha} \times k$ est nommée *décomposition* de n.
   Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,
   $120 = 2^3 \times 15$.

a. Donner la décomposition de l'entier 192.

b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^{\alpha} \times k$ et $z = 2^{\beta} \times m$.

Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

c. En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels $x,\ y$ jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n,
$(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.
Déterminer un TP de la forme $(2015,\ y,\ z)$.
3. **a.** En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

   b. En déduire un TP de la forme $(x,\ 2015,\ z)$.*

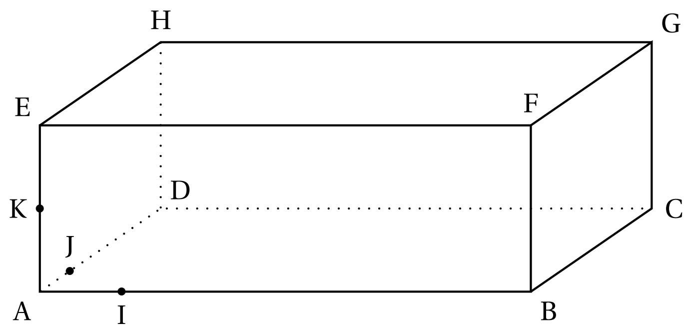
∽ Baccalauréat S Polynésie 12 juin 2015 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie)**. On ne demande pas de justification.*

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.*

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type$\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.
Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

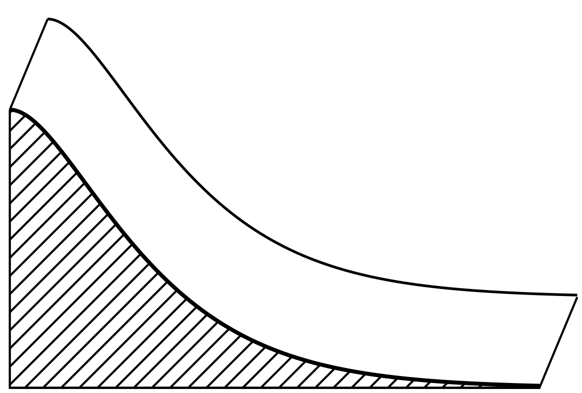
1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

   b. De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?*

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :

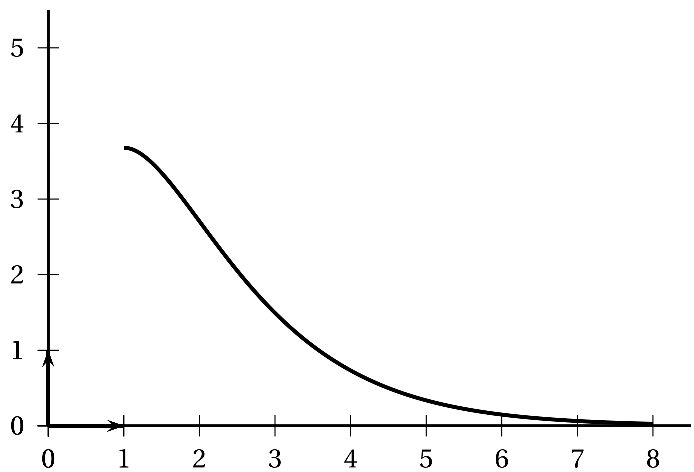


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
Déterminer la valeur de l'entier b.

2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1~;~8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,8]$ par

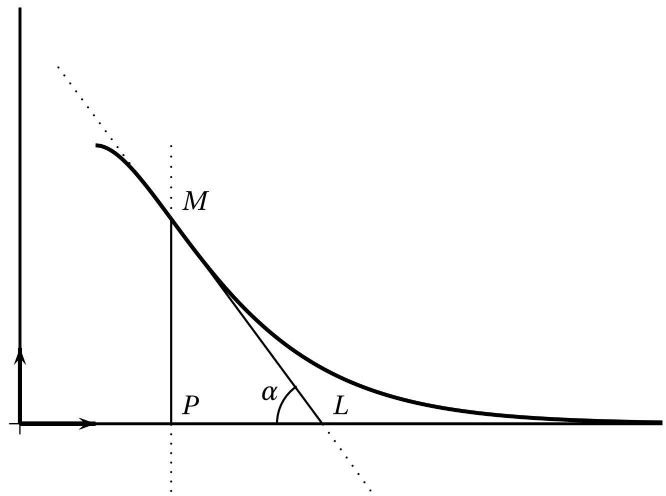
$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,8]$, $f'(x) = 10(1-x)\text{e}^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$. Justifier que $\tan\alpha = \left|f'(x)\right|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?*

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2-\text{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur …
	S prend la valeur …
Traitement :	Pour k variant de …à …faire
	…prend la valeur …
	…prend la valeur …
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).*

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
   Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme
   $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

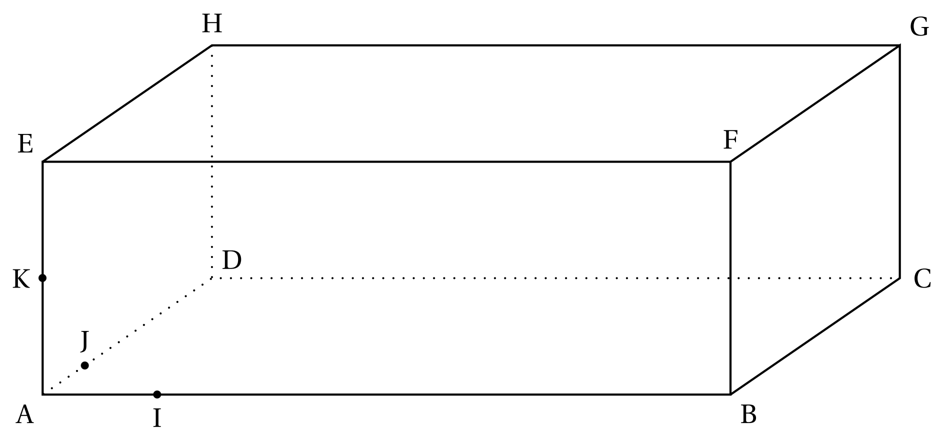
$$\left\{\begin{array}{lcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.
4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.
5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par
   $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.*

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 1



Baccalauréat S Asie 16 juin 2015

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

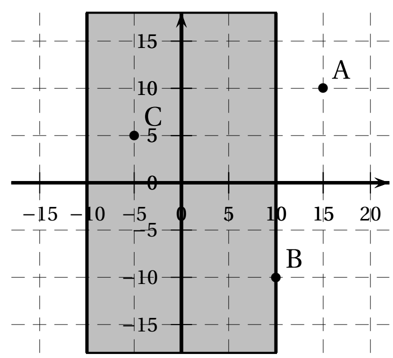
Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.



On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.

Ainsi, par exemple :

— si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;

— si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;

— si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.
2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0,6$?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?
2. *Restitution organisée des connaissances*
   Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $\mathrm{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
   a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
   Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?*

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives$x + y + z - 5 = 0$ et $7x - 2y + z - 2 = 0$.

1. **Affirmation 1 :** les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.
2. **Affirmation 2 :** les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& t\\ y &=& 2t+1,\\ z &=& -3t+4\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$
3. Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.
   On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.
   Affirmation 3 : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle [0,658 ; 0,771].
4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$

TRAITEMENT	Lire a et b
	Tant que $b - a > 0,3$
	    x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	    Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x
	        sinon b prend la valeur x
	    Fin Si
	Fin Tant que
	Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.*

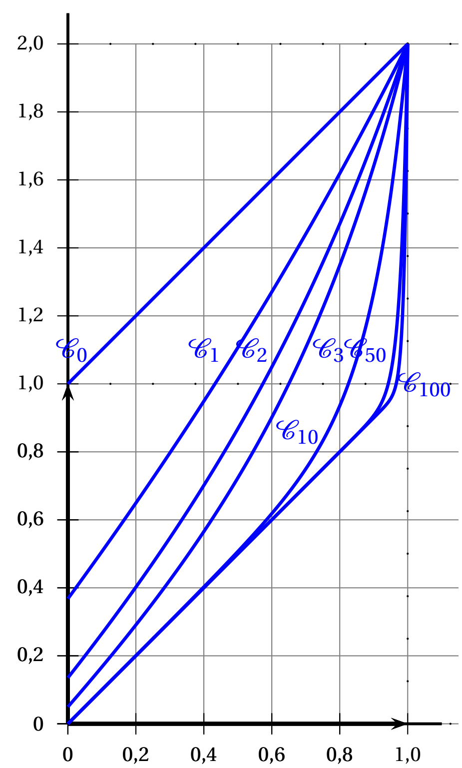
Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes $\mathcal{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\text{j} = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $\text{j}^3 = 1$;
   b. $\text{j}^2 = -1 - \text{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \text{j}b + \text{j}^2 c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \text{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \text{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1+2+\ldots+n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1+2+3+4$.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. **a.** Montrer que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2+n-2p^2 = 0$.

   b. En déduire que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2-8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x~;~y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}3&8\\1&3\end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3. Démontrer que $(x~;~y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'~;~y')$ est solution de (E).
4. On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
   $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n~;~y_n\right)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.*

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 22 juin 2015 ∾

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g_a par
$g_a(x) = ax^2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 1** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. **a.** On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.
   Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
   Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

   b. Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
   On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que
   $a = 0,1$.

a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.
On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\,;\,+\infty\right[$.

b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2\text{e}}$.

a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\text{e}}}$.

b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\text{e}}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.*

EXERCICE 2 — 5 POINTS

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \text{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t \text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \text{e}^{-\lambda x} - \text{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

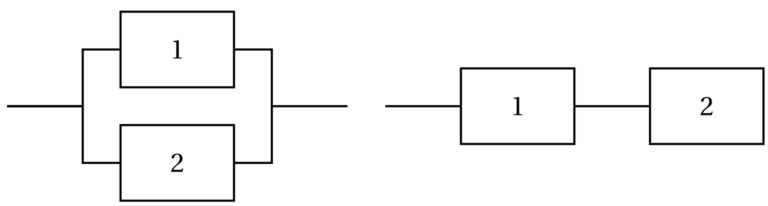
1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

   a. Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
   b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2. On suppose que $E(X) = 2$.
   a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   b. Calculer la valeur de λ.
   c. Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
   d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



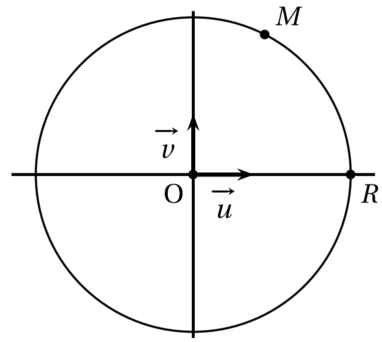
Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.*

EXERCICE 3 **4 POINTS**
Commun à tous les candidats

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[\text{O} ; \vec{u}\right)$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.

2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif?

2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif?

3. On suppose désormais que z_0n'est pas un nombre réel.

a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.*

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p=2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1}=0,5u_n+0,5n-1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p=4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

   Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?
   Justifier.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$.
   Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=0,1u_n-0,1n+0,5$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n=10\times0,5^n+n-5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).*

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel
	a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a
	Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	Affecter à a le nombre b
	Affecter à b la valeur de c
	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.
2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
   Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

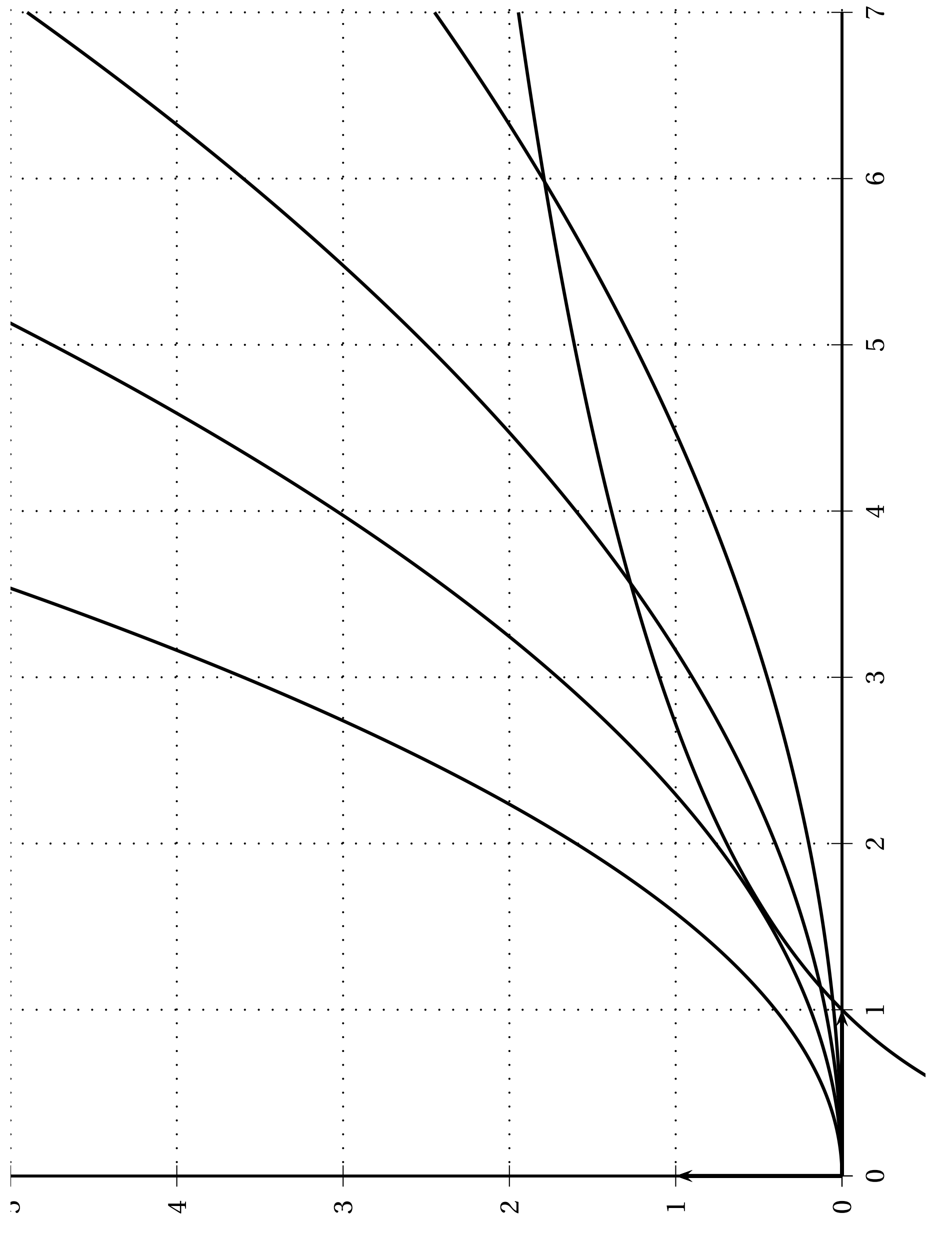
Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.
   a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
   b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.
   c. Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.
   d. Décoder la lettre R.

2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D. Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).
3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?*

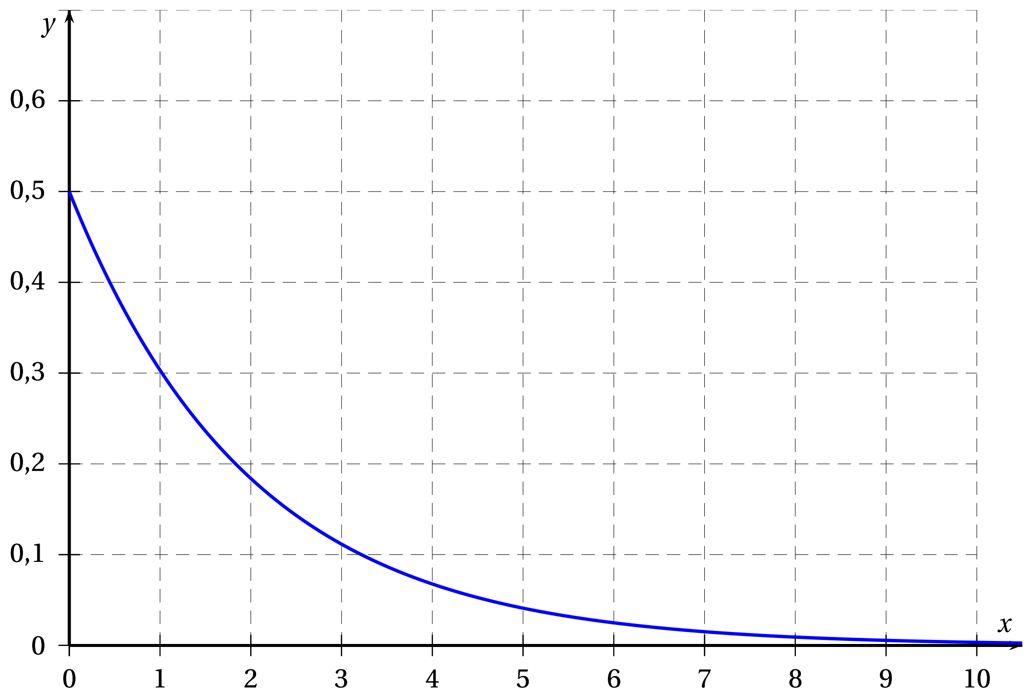
À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2



Baccalauréat S Métropole 22 juin 2015

EXERCICE 1 **6 POINTS**
Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
   On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$
   a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
   Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie
   $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.
   c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X

   Dans la suite de l'exercice on prend $\boldsymbol{\lambda = 0,15}$.
   d. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
   e. Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$.
   a. Calculer la probabilité de l'évènement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.
Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.
Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à $0,067$ ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.
De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à $0,015$ et $0,010$ ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut $0,057$.

   Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

   Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne. Ses doutes sont-ils justifiés ?*

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\,;\,-1\,;\,5)$, B$(2\,;\,-1\,;\,5)$, C$(11\,;\,0\,;\,1)$, D$(11\,;\,4\,;\,4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1\,;\,5)$ et $N_t(11\,;\,0,8t\,;\,1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).

   Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.

   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E$(11\,;\,-1\,;\,5)$.

   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?*

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4+4\text{i}\sqrt{3}$,
$b = 4-4\text{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\text{i}$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A$'$, B$'$ et C$'$ d'affixes respectives $a' = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4+4\text{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3}+4\text{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A$'$B], [B$'$C] et [C$'$A].

Calculer r et s. On admet que $t = 2-2\sqrt{3}+\text{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.*

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$7x-5y = 1.$$

a. Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5k+3 \\ y & = & 7k+4 \end{array}\right. \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x-5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

- Lorsqu'on est en A :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

- Lorsqu'on est en B :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

- Lorsqu'on est en C :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n, on note $a_n,\ b_n$ et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$.

a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

b. Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note $\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n$ les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

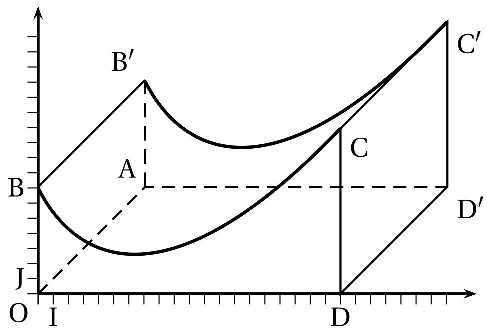
a. Déterminer les nombres $a_n,\ b_n$, à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

b. Déterminer les limites des suites $(a_n),\ (b_n)$ et (c_n).

c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?*

EXERCICE 4 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

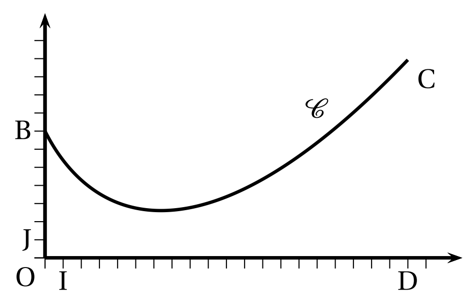
Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

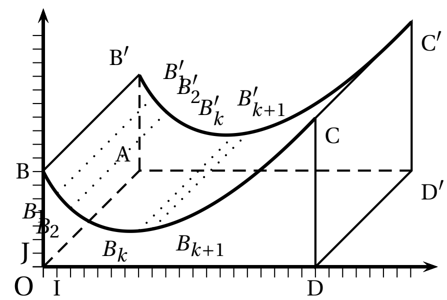
P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\ ;\ f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = \text{B}$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B'_k$ (voir figure).

a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,
$B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables Fonction	S : réel K : entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de ...à ... S prend pour valeur ...... Fin Pour
Sortie	Afficher ...

*

Baccalauréat S Métropole–La Réunion 9 septembre 2015

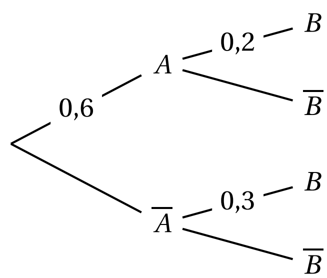
EXERCICE 1 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

Question 1

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'évènement B ?

a. 0,12 **b.** 0,2 **c.** 0,24 **d.** 0,5

Question 2

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125 **b.** 0,25 **c.** 0,75 **d.** 0,875

Question 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $P(X \geqslant 135)$?

a. 0,159 **b.** 0,317 **c.** 0,683 **d.** 0,841

Question 4

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. $[0,371 ; 0,637]$ **b.** $[0,480 ; 0,523]$ **c.** $[0,402 ; 0,598]$ **d.** $[0,412 ; 0,695]$

Question 5

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.

Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 **c.** 1 600 **d.** 3 200 *

EXERCICE 2 **7 POINTS**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

— K et i des entiers naturels, K étant non nul ;

— A, x et h des réels.

Entrée :	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{K}$

Traitement	Pour i variant de 1 à K
	    Affecter à A la valeur $A + h \times f(x)$
	    Affecter à x la valeur $x + h$
	Fin Pour

Sortie	Afficher A

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.
3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?*

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points A(0 ; 1 ; −1) et B(−2 ; 2 ; −1).

— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& -2+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. **a.** Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.
   b. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u\ ;\ 1+u\ ;\ -1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ et passe par le point M.
4. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\ ;\ 3-3u\ ;\ -1)$.
5. **a.** Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.
   b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

6. **a.** Exprimer MN^2 en fonction de u.
   b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.*

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que $15u - 26v = 1$.
   Trouver un tel couple.
2. En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ k_0)$ de l'équation (E).
3. Montrer que $(x\ ;\ k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si
   $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$.
4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 26q + 7m \\ k & = & 15q + 4m \end{array}\right. \quad \text{où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

— à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,
— on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26,
— on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot **MATHS**.
2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.
   a. Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x - 26k = y - 7$.
   b. En déduire que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$.

c. En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.

3. Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B. Décoder le mot WHL.

4. Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.*

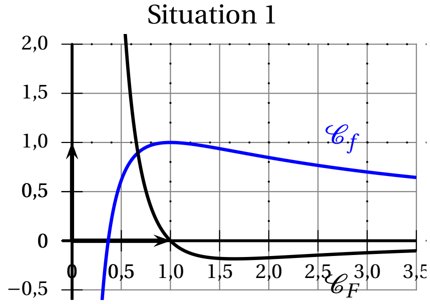
EXERCICE 4 **3 POINTS**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

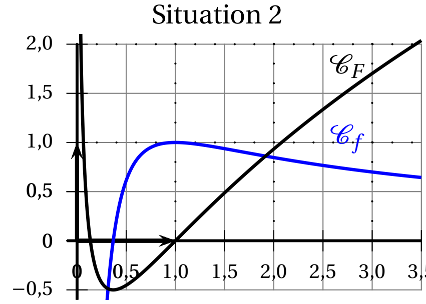
$$f(x) = \frac{1}{x}(1+\ln x)$$

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

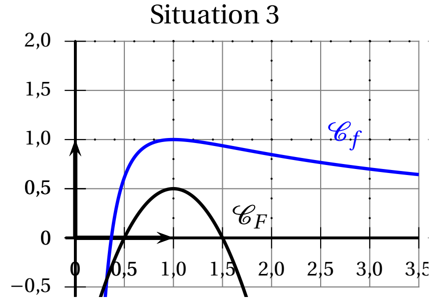
Situation 1



Situation 2



Situation 3



2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :

— K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;

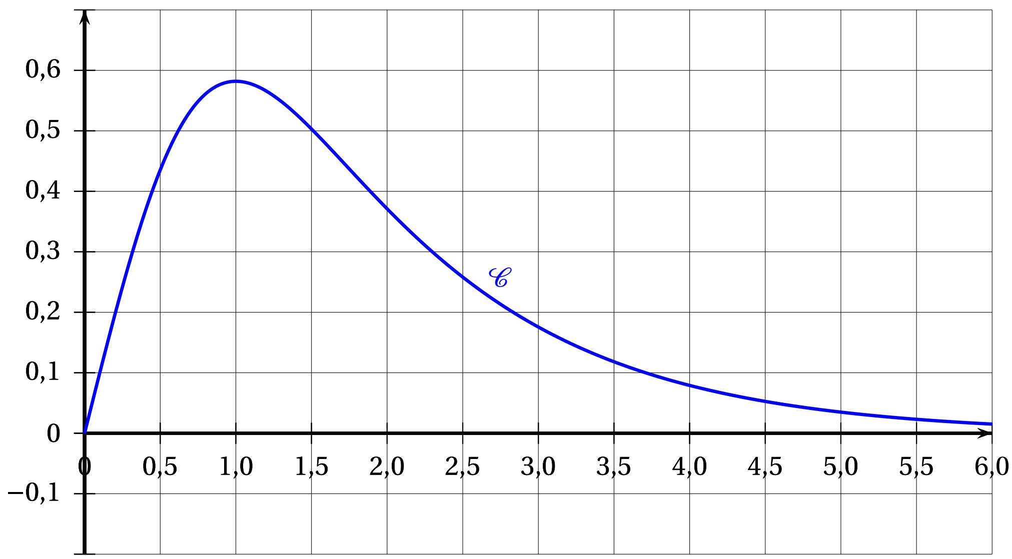
— L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

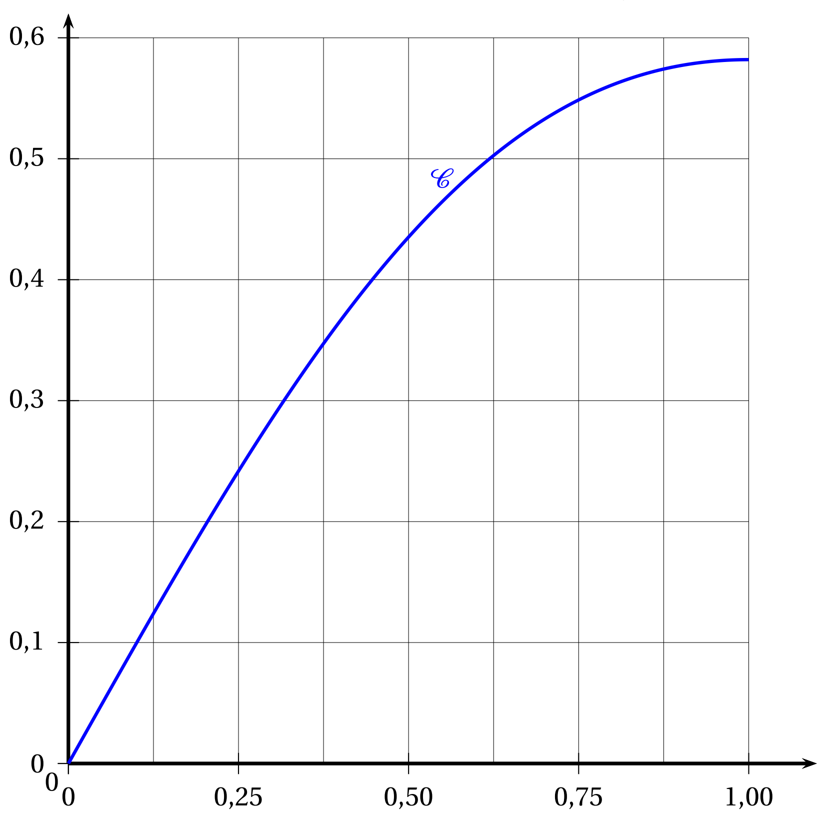
b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

ANNEXE Exercice 2
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0 ; 6]$



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0 ; 1]$



Baccalauréat S (spécialité) Polynésie 9 septembre 2015

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \text{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\text{e}^{\text{i}\theta}(1 - \text{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,
$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \text{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :
   a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b. la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;
   c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.
2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $h'(x) = \text{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.
   b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$,
   $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

5. On admet que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$$

est une primitive de la fonction h.

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_{\{}$ et $\mathscr{C}_{\}}$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\pi$.

Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

   On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

   Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1}.

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.

   On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

   On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

   Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.

Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;

- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de 0,325.
2. Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.
3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez- vous ?

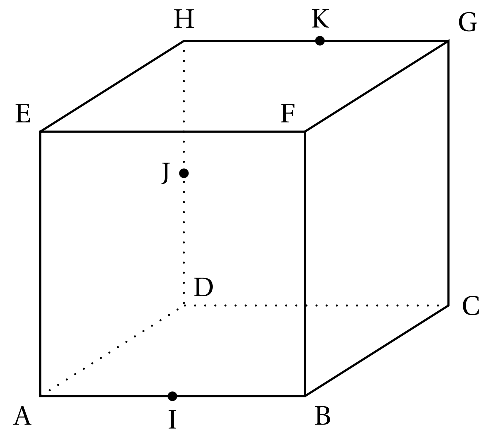
Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.
Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.
Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?*

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geqslant 1 + n$.
   b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?
3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.
   a. Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.
   b. On considère la proposition suivante :
   « Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts,
   $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
   Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.
   a. Quels sont les diviseurs de n ?
   b. En déduire que $S(n) = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.
5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

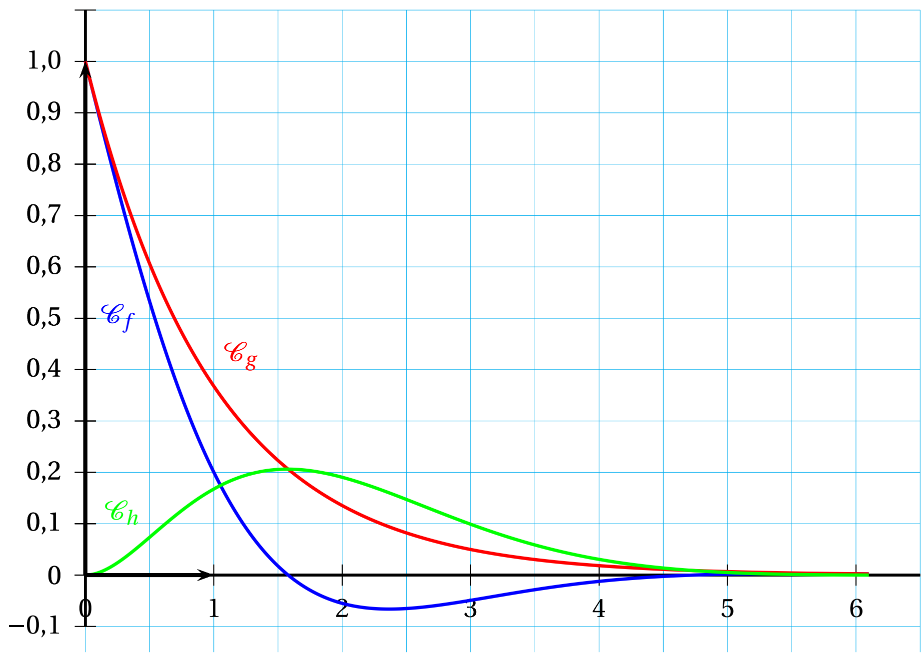
a. Soit m un entier naturel.

Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

b. Démontrer que $S(n) = \dfrac{1-p^{14}}{1-p} \times \dfrac{1-q^8}{1-q}$.*

Annexe

Exercice 1



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2015

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2\mathrm{e}^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

- **a.** Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$.
- **b.** Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
- **d.** Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.
En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.

- **a.** Interpréter graphiquement la quantité I_n.
- **b.** Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,

$$f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-2x}f_n(x).$$

- **b.** En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}.$$

b. En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.*

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la valeur exacte de x.

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur ?*

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les trois questions sont indépendantes.
Toute réponse doit être justifiée.

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln(v_n)$.
La proposition $(\mathscr{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$(\mathscr{P}) : \text{si la suite } (v_n) \text{ est majorée alors la suite } (w_n) \text{ est majorée.}$$

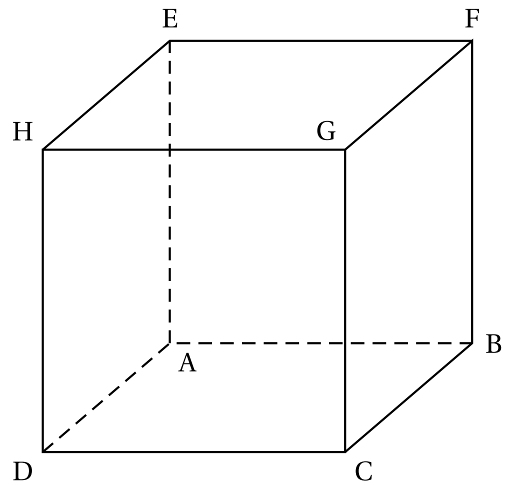
3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par

$$z_0 = 2 + 3\text{i et, pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \text{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& s\\ y &=& 1-s,\\ z &=& 0\end{array}\right. \text{ où } s \text{ décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$ où t est un réel.

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).

Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\,;\,1-s\,;\,0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\,;\,t\,;\,t)$ un point de la droite (AG).

a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{6}$.

b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.

Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas?*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. **a.** Donner un couple solution $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de cette équation.
   b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x+2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay+2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on ?*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».
La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est $0,17$. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est $0,10$.

La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les évènements suivants :
A : « La bouteille d'eau provient de la source A »
B : « La bouteille d'eau provient de la source B »
S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut $0,149$.
3. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.
4. Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.

   Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95 % la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type $1,6$.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type σ.

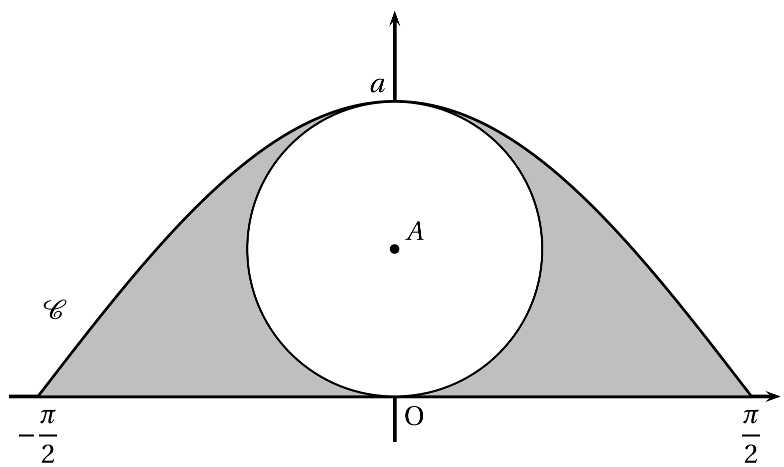
1. Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre $6,4$ mg et $9,6$ mg.
2. Calculer la probabilité $p(X \leqslant 6,5)$.
3. Déterminer σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est $0,1$.

Partie C

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.
La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = a\cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}~;~\frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0~;~\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ pour des valeurs de a inférieures à $1,4$.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathcal{C}$ est égale à $2a$ unités d'aire.
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte?*



EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

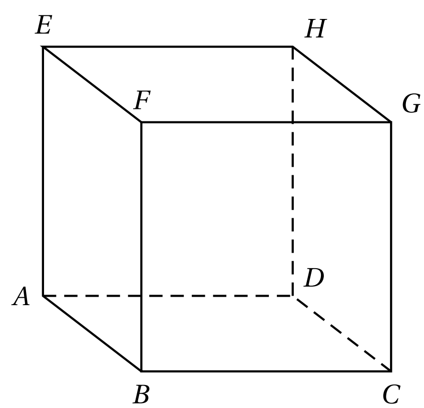
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   b. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \frac{1}{3}\right)$.
2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
3. Soit M un point de l'espace.
   a. Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   b. En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.
   c. Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.*

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$
	    A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?

Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.

Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne. Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.

On souhaite étudier l'évolution sur le long terme, de la fréquentation du site à partir d'un mois noté 0.

Des relevés de la fréquentation du site ont conduit aux observations suivantes :

- Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
- Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.
- Chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.

On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n). Pour tour entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement des approximations du nombre de débutants et du nombre d'avancés au début du mois n.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

On pose $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} d_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. **a.** Justifier l'égalité $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70$ dans le contexte de l'exercice.

b. Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$A^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **a.** Déterminer la matrice C qui vérifie l'égalité $C = AC + B$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = AV_n.$$

c. On admet que pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$.
En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$U_n = \begin{pmatrix} 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$$

4. a. On admet que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

b. En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme ?*

Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015

Exercice 1 — **6 points**

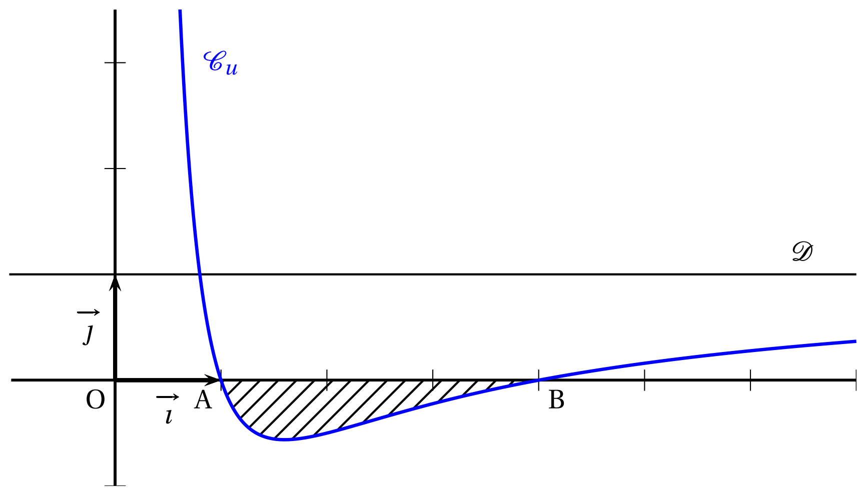
Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la **partie A**.
2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que

$$4 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant u(x).$$

   Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$?
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

$$\text{A}(3\,;\,-1\,;\,4), \quad \text{B}(-1\,;\,2\,;\,-3), \quad \text{C}(4\,;\,-1\,;\,2).$$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x - 3y + 2z - 7 = 0$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -1+4t \\ y & = & 4-t \\ z & = & -8+2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+s-2s' \\ y & = & 1-2s+s' \\ z & = & 1-4s+2s' \end{array}\right.$, $s \in \mathbb{R}$, $s' \in \mathbb{R}$ appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite Δ.*

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;

— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

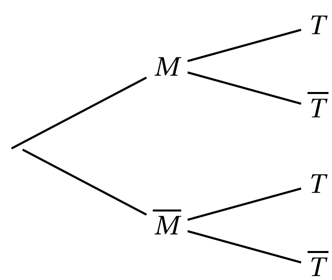
— M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »

— T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}\left(\text{respectivement } \overline{T}\right)$ l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).

On note $p\,(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



   b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P\left(\overline{M} \cap T\right)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. **a.** Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

   b. Étudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0,95$.

   En utilisant les résultats de la question **2.**, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Partie B

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.
Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par F la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

1. **a.** Sous l'hypothèse $p = 0,15$, déterminer la loi de X.
   b. Dans un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus.
   Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire ?
   Justifier. (On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.)
2. On considère désormais que la valeur de p est inconnue.
   En utilisant l'échantillon de la question **1. b.**, proposer un intervalle de confiance de la valeur de p, au niveau de confiance de 95 %.

Partie C

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'écart type $\sigma = 10$.
On souhaite déterminer sa moyenne μ.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de T est donnée en annexe.

1. **a.** Conjecturer, à l'aide du graphique, une valeur approchée de μ.
   b. On donne $p(T < 110) = 0,18$. Hachurer sur le graphique un domaine dont l'aire correspond à la probabilité donnée.
2. On note T' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T-\mu}{10}$.
   a. Quelle loi la variable aléatoire T' suit-elle ?
   b. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de la moyenne μ de la variable aléatoire T et vérifier la conjecture de la question 1.*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :
- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;

- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. **a.** Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.
   a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.
4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	$\quad$ n prend la valeur $n+1$
	$\quad$ u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   a. Que fait cet algorithme ?
   b. Quelle valeur affiche-t-il ?*

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$,
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n,
   $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

b. Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

4. **a.** On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b. Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

5. **a.** On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times 0,85^n & \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\times 0,85^n\\ \dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times 0,85^n & \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times 0,85^n\end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50\times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?

6. **a.** On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.

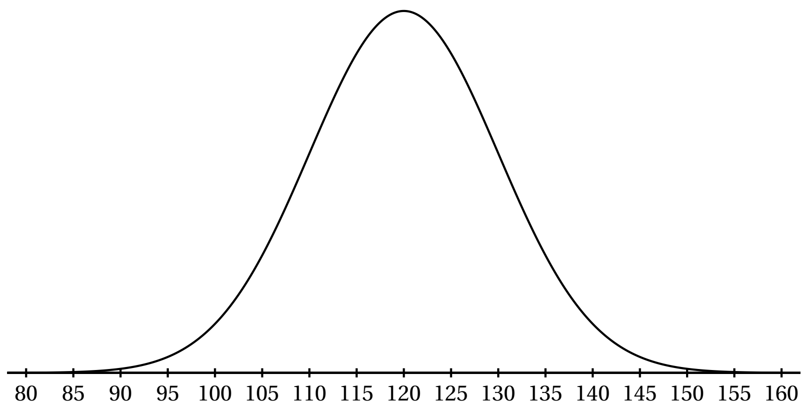
Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

b. En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50\times 0,85^n + 40 < 80 - 50\times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme. *

Annexe

Exercice 3 Partie C Question 1
(à compléter et à remettre avec la copie)

Courbe représentative de la fonction densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ 10^2\right)$



Exercice 4 Spécialité
Question 6 (à compléter et à remettre avec la copie)

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	Rprend la valeur 90
	C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que ...... faire
	n prend la valeur ...
	R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$
	C prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2016 ∾

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;

D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;

B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;

L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;

S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
   a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
   b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\dfrac{21}{40}$.
   c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre $9,9$ et $10,1$ grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,06$.
   On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
   Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.
   a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?
   b. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.*

EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données en **annexe 1**.
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique. *

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A(1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?
2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

3. **a.** Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.
   b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.
   c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.
4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \quad \text{et} \quad -10 \leqslant m' \leqslant 10.$$

   On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0.$$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$
	Alors Afficher $\left(m\ ;\ m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme?

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1) et (5\ ;\ -4)$.
Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0=1 \quad \text{et} \quad z_{n+1}=\left(1+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. **a.** Vérifier que $1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\text{e}^{\text{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n=|z_{n+1}-z_n|$.

   a. Interpréter géométriquement d_n.

   b. Calculer d_0.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\left(1+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z_{n+1}-z_n\right).$$

d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_n.

c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

d. Justifier cette construction.*

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).
Exemple :
M correspond à $x = 12$
$7 \times 12 + 5 = 89$
Or $89 \equiv 11\ [26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.

2. a. Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x\ [26]$ alors $15k \equiv x\ [26]$.

b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

c. En déduire que $y \equiv 7x+5\ [26]$ équivaut à $x \equiv 15y+3\ [26]$.

3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

Partie B

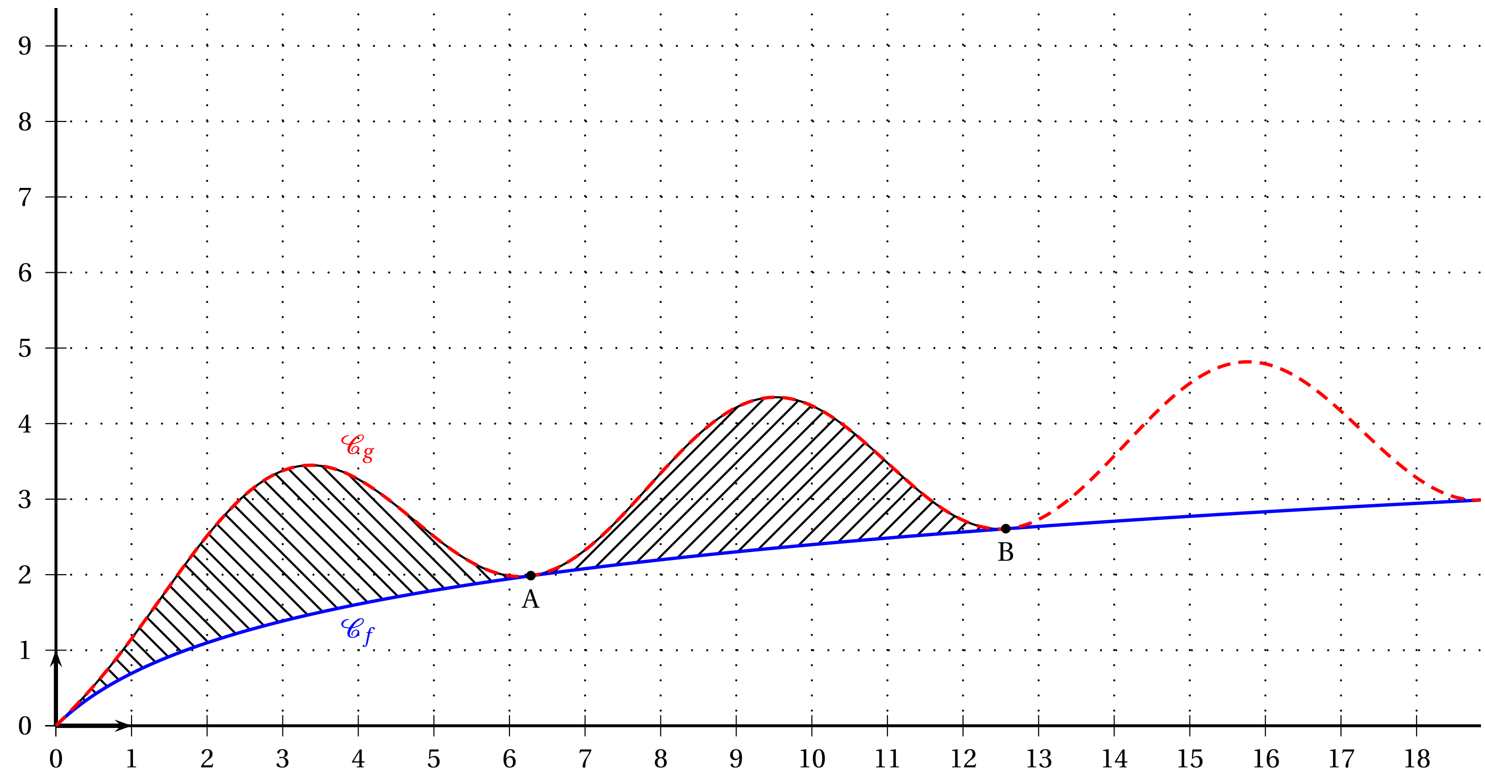
On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n + 5$ et $b_{n+1} = 15b_n + 3$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^n - \dfrac{5}{6}$.
On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n,
$b_n = \left(b_0 + \dfrac{3}{14}\right) \times 15^n - \dfrac{3}{14}$.

Partie C

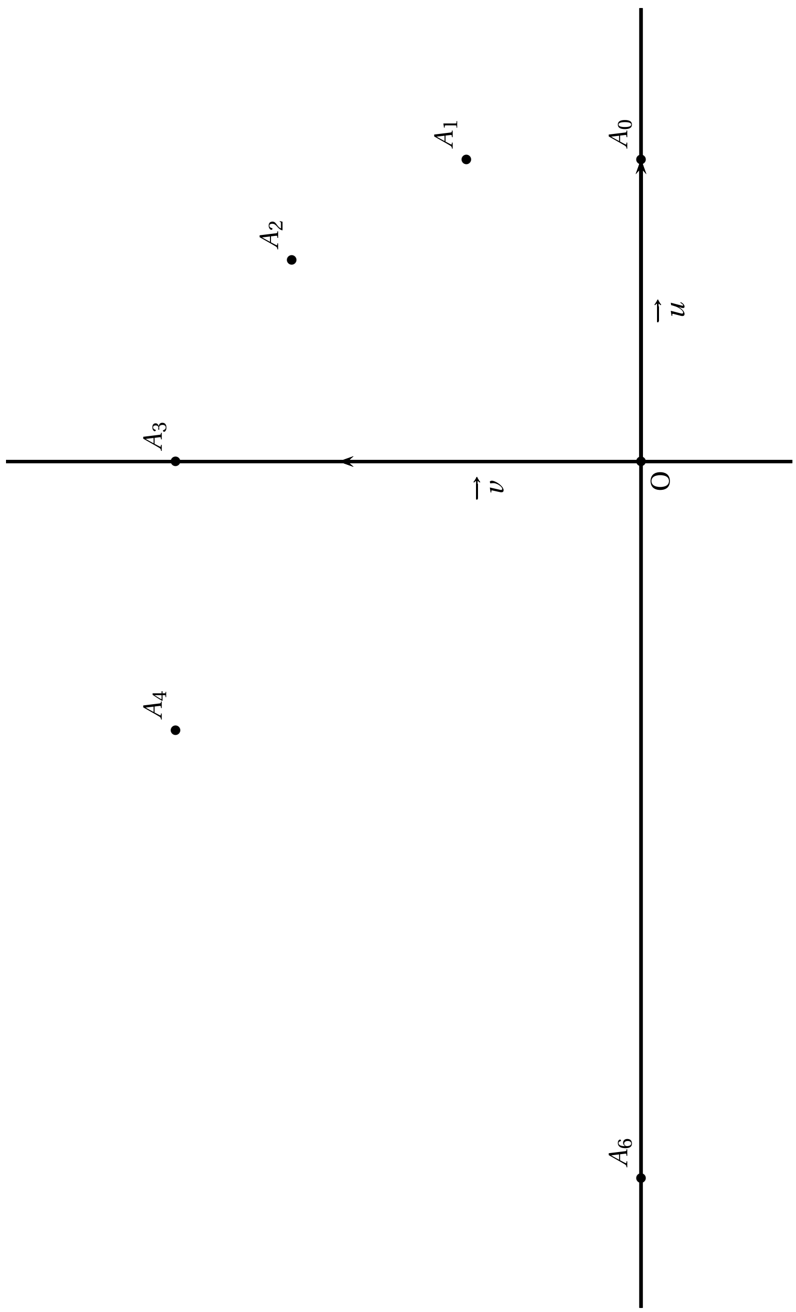
Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.
Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.
Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.
Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ. *

ANNEXE 1 de l'exercice 2



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 4


A_0
A_1
A_2
$\vec{u}$
A_3
$\vec{v}$
O
A_4
A_6

Index