

Sophie Germain, une mathématicienne face aux préjugés de son temps

Anne Boyé(*)

« Il faut en faire l'aveu pénible. Tandis que tant de femmes ont trouvé la célébrité dans les écrits frivoles, la seule femme française qui ait réussi dans les travaux sévères, estimée des géomètres, auxquels d'ailleurs tout un aspect de son génie échappe, est à peine connue du public. Son œuvre néanmoins est de celles dont la science et la philosophie ont tiré profit et honneur, et son nom, que l'avenir connaîtra mieux, appartient à l'histoire des progrès de l'esprit humain. »

Hippolyte Stupuy, 1879⁽¹⁾

Le 18 mars 2016, à l'Institut Henri Poincaré, l'émission par La Poste d'un timbre à l'effigie de Sophie Germain était l'occasion de célébrer cette mathématicienne, née il y a 240 ans, le 1^{er} avril 1776, mais surtout la première Française à avoir reçu un prix de l'Académie des sciences, il y a 200 ans, en 1816.

Raconter le parcours peu commun de Sophie Germain, prendre la mesure de l'audace insolite dont elle fit preuve pour se faire une place dans ce monde des mathématiciens *a priori* très fermé aux femmes, permettent d'évoquer les interdits sociaux, les stéréotypes et préjugés qui ont traversé les siècles passés. À tel point que la croyance en une répartition « naturelle » de certaines qualités entre les sexes finit par faire partie, inconsciemment, du moi profond de chacun et chacune, encore en notre XXI^e siècle. C'est à cette histoire que je vais m'attacher, qui est de celles qui parfois permettent des débats dans nos classes et une prise de conscience.

Jusqu'à une période relativement récente, nous connaissions peu de choses au demeurant sur la vie et l'œuvre mathématique de Sophie Germain : une partie de sa correspondance avait été publiée, ainsi que ses papiers philosophiques, grâce à l'intervention de son neveu Armand-Jacques Lherbette (1791-1864). Adrien Marie Legendre (1753-1833) avait mentionné sa contribution sur la résolution du dernier théorème de Fermat, ce qui avait tout de même eu pour conséquence, quelques années plus tard, de donner son nom à un théorème et à une certaine sorte de nombres premiers. Enfin la notice nécrologique que fit Guglielmo Libri (1803-1869) sur Sophie, en 1832, nous faisait revivre les épisodes marquants de sa vie dont elle lui avait fait la confidence. Le prix de l'académie qui était la seule reconnaissance officielle de ses talents, de son vivant, était presque oublié.

(*) Régionale de Nantes, chercheuse associée au centre François Viète de Nantes, membre de l'association *Femmes et mathématiques*. anne.boyé@neuf.fr

(1) Stupuy, Hippolyte (né en 1832), « Étude sur la vie et les œuvres de Sophie Germain » Œuvres philosophiques de Sophie Germain, Librairie de Fimin-Didot et Cie, 1) éd. 1879 2^e éd. 1896.

Mais un hasard heureux de l'histoire a permis la redécouverte d'un grand nombre de ses papiers manuscrits, à la fin du XX^e siècle. Ces manuscrits sont toujours à l'étude et montrent que les recherches de Sophie Germain sur ce que l'on nomme le *grand théorème de Fermat*, étaient beaucoup plus avancées que ce que l'on avait pu croire. C'était vraiment une grande mathématicienne. Je me propose ici d'éclairer quelques moments de sa vie, et ne ferai qu'évoquer la teneur de ses derniers travaux, qui sont d'un très haut niveau. Ceux et celles dont la curiosité sera éveillée pourront lire quelques articles que je donne en référence.

Sophie est née au siècle des Lumières, en France, le pays de philosophes qui proclament combattre l'ignorance, lutter contre les oppressions religieuses, politiques, sociales... Leurs avis restent cependant très partagés sur la condition de la femme et son accès à l'éducation. Certaines femmes brillantes tiennent salon. Elles ont eu la chance de bénéficier, grâce à leur situation sociale, de l'enseignement de précepteurs, par exemple. Elles sont de fait peu nombreuses, et si ces salons sont des lieux de diffusion de la culture, en particulier scientifique, la place naturelle de la femme est au sein de son foyer. Elle est cantonnée au rôle d'épouse et mère. Émilie du Châtelet (1706-1749) se révoltait en 1735, au nom de ses compagnes :

« *Qu'on fasse un peu de réflexion pourquoi depuis tant de siècles, jamais une bonne tragédie, un bon poème, une histoire estimée, un bon tableau, un bon livre de physique n'est sorti des mains d'une femme ? Pourquoi ces créatures, dont l'entendement paraît en tout si semblable à celui des hommes, semblent pourtant arrêtées par une force invincible, et qu'on en donne la raison si l'on peut (...) Je suis persuadée que bien des femmes ou ignorent leurs talents, par le vice de l'éducation, ou les enfouissent par préjugé et faute de courage dans l'esprit.*⁽²⁾ »

Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), dont les idées devaient influencer longtemps les réformateurs de l'éducation, répondait dans l'*Émile* :

« *Ainsi toute l'éducation des femmes doit être relative aux hommes. Leur plaire, leur être utiles, se faire aimer et honorer d'eux, les élever jeunes, les soigner grands, les conseiller, les consoler, leur rendre la vie agréable et douce, voilà les devoirs des femmes dans tous les temps et ce qu'on doit leur apprendre dès leur enfance.* »

Ajoutant : « *La recherche des vérités abstraites et spéculatives, des principes, des axiomes dans les sciences, tout ce qui tend à généraliser les idées n'est point du ressort des femmes. (...) Elles n'ont pas non plus assez de justesse et d'attention pour réussir aux sciences exactes.*⁽³⁾ »

Si un peu plus tard, certains estiment que finalement des femmes instruites sont probablement de meilleures mères, les mêmes pensent qu'il serait fort préjudiciable qu'elles reçoivent la même éducation que les garçons. C'est ce que souligne Camille Sée (1847-1919), le fondateur d'un enseignement secondaire public pour les filles en

(2) Préface de la traduction de *la Fable des abeilles*, 1735, (de Bernard Mandeville (1670-1733).

(3) *Émile ou l'éducation*, 1762

1880⁽⁴⁾ : « *Il ne s'agit pas de préparer les jeunes filles dans le monde n'est pas de faire faire de nouveaux progrès en chimie. Les lycées ont été fondés pour faire de bonnes maîtresses de maison, sachant à la fois plaire à leurs enfants, gouverner leur maison avec économie et régler leur intérieur.* » *savantes. Leur mission est de leur enseigner les mathématiques et à leur donner de bonnes mœurs, de leur apprendre à être de bonnes mères, à leur servir de modèles, à leur inspirer un respect pour leur mari, à leur apprendre à instruire leurs enfants, à leur servir de modèles autour d'elles le bien.* »

C'est ce que réaffirmera Ferdinand Buisson (1841-1932), un des grands pédagogues du début du XX^e siècle, dans son *Dictionnaire de pédagogie*, parlant de Condorcet : « *Les femmes, dit-il, ont autant d'intelligence que les hommes. Mais il oublie qu'elles n'ont pas les mêmes devoirs, la même destination. Il oublie qu'ayant un autre but à atteindre, elles doivent y être préparées par d'autres moyens.* »⁽⁵⁾ ».

Et les mathématiques sont particulièrement discriminées. Non seulement l'esprit fragile des femmes pourrait s'en trouver très affecté, non seulement leur cerveau n'est pas fait pour l'abstraction et les sciences exactes, mais les mathématiques les éloigneraient peut-être de leur rôle « naturel » de prendre soin de leur foyer.

C'est dans ce contexte qu'est née Sophie Germain, le 1^{er} avril 1776 dans une famille de commerçants aisés. Son père Ambroise François Germain est drapier, « marchand de soie en bottes »⁽⁶⁾. Il appartient, semble-t-il, à la bourgeoisie libérale instruite. On ne sait à vrai dire que peu de choses sur la prime enfance de Sophie. Quelle première éducation a-t-elle reçue ? Ce qui suivra permet cependant d'imaginer que la bibliothèque familiale renferme de nombreux ouvrages scientifiques de bon niveau, philosophiques récents, probablement l'encyclopédie dite « de Diderot et D'Alembert », et beaucoup d'autres... Elle a deux sœurs. Sa sœur aînée épousera un notaire et semble elle-même très cultivée, sa plus jeune sœur épousera en premières noces un médecin, Geoffroy de Villeneuve, apparenté au célèbre naturaliste Geoffroy Saint Hilaire.

La révélation et la première audace de Sophie :

En 1789, elle a 13 ans, c'est là que débutent les confidences qu'elle fera beaucoup plus tard à son ami Guglielmo Libri, qui les livrera dans son hommage posthume à Sophie.

La maison des Germain, rue Saint Denis, est au cœur de l'agitation parisienne. Les filles sont confinées à la maison, mais les bruits du dehors leur parviennent. M. Germain a en effet été élu député du Tiers État, et des réunions ont lieu à son domicile. Libri nous rapporte que « *cherchant une occupation assez sérieuse pour faire diversion à ses craintes, elle se réfugie dans la bibliothèque de son père.* »

Elle semble lire tout ce qui se présente, et ouvre un jour par hasard l'Histoire des mathématiques de Jean-Étienne Montucla (1725-1799), qui comprend alors les deux

(4) Cf. Julien Moreau, *Bulletin dde l'APMEP*, N° 519, p/342-352. « Fallait-il envoyer les filles au Lycée ? »

(5) Ferdinand Buisson sera prix Nobel de la paix en 1927.

(6) Il s'agirait d'un commerce d'écheveaux de soie. Le grand père de Sophie était orfèvre.

premiers tomes⁽⁷⁾. Elle y trouve le récit de la mort d'Archimède, qui tout entier à sa méditation sur une figure de géométrie ne se serait aperçu ni de la prise de Syracuse, ni du saccage de la ville, ni du glaive qu'un soldat romain avait levé sur lui. Un sujet capable d'absorber à ce point quelqu'un la fascine. Elle prétend que c'est ce qui l'a décidée à se consacrer aux mathématiques. J'oserai ajouter que l'histoire des mathématiques racontée par Montucla est elle-même passionnante et peut constituer une première initiation⁽⁸⁾.

Et voici la première audace de Sophie. Elle sera « mathématicien ». Sans conseil et sans aide extérieure, elle commence l'exploration de la bibliothèque familiale et se fait un programme d'étude mathématique. Elle dit avoir commencé par le cours de mathématiques d'Étienne Bézout (1730-1783)⁽⁹⁾. Or le niveau de ce cours n'est pas vraiment élémentaire. Elle se met à étudier jusque très tard dans la nuit et ce soudain intérêt pour un sujet « si peu féminin » inquiète ses parents. Ils essaient de la détourner de cette passion. On lui confisque ses chandelles, ses vêtements, on lui retire tout chauffage. Elle n'est pas découragée, cache des bougies, travaille dans le froid, jusqu'à ce qu'on la découvre le matin, enveloppée dans des couvertures, l'encre gelée dans l'encrier⁽¹⁰⁾. Il faut dire que l'hiver 1789 est très rude.

Cette volonté illimitée et cette énergie à réaliser son projet, qui la suivront tout au cours de sa vie, impressionnent finalement ses parents qui cèderont, et la soutiendront dans toutes ses entreprises futures, moralement et financièrement.

Elle se remet avec ardeur au travail et se rend compte que des ouvrages incontournables sont en latin. Elle l'apprend donc ! Et peut alors lire par exemple certains textes d'Euler (1707-1783) ou de Newton (1643-1727), non encore traduits.

Nous atteignons 1794, elle a 18 ans.

L'agitation révolutionnaire s'est un peu apaisée, et même si, au printemps de cette année, Lavoisier a été guillotiné et Condorcet s'est probablement suicidé en prison, la République a à nouveau besoin de savants et d'ingénieurs. La France est en effet en guerre contre la Prusse.

Le 28 septembre 1794 est créée l'École centrale des travaux publics, qui deviendra en 1795 l'École polytechnique, sous la houlette des plus grands savants et mathématiciens.

Sophie sent qu'elle doit poursuivre son instruction et s'initier aux théories les plus

(7) La première édition de L'histoire des mathématiques de Jeans Étienne Montucla est parue en 1758 et comportait deux volumes. Une deuxième édition, entreprise en 1799 et achevée en 1801 par les soins de Jérôme Lalande comporte deux volumes supplémentaires.

(8) En ligne sur le site gallica.bnf.fr

(9) Le Cours complet de mathématiques à l'usage des gardes de la marine et de l'artillerie, par Étienne Bézout, servira de référence pour les candidats au concours d'entrée à l'École polytechnique pendant plusieurs années. Gros succès de librairie, ce livre a connu de nombreuses rééditions et des traductions dans plusieurs langues.

(10) La mathématicienne écossaise, Mary Somerville (1780-1872), raconte qu'il lui est arrivé à peu près la même chose, à la même époque.

récentes. Mais la Révolution a apporté peu de changements à la situation sociale des femmes, en particulier sur le plan de l'instruction. L'École polytechnique, qui se veut ouverte à des jeunes gens de toute condition, est évidemment fermée aux jeunes filles. Elle le restera jusqu'en 1972 !

La deuxième audace de Sophie

On la dit timide, se mêlant peu au monde, mais elle est déterminée. On ne sait trop le fin mot de l'histoire, mais il semble qu'elle ait appris par hasard qu'un certain Auguste Leblanc était démissionnaire de l'École polytechnique. Elle décide d'emprunter son nom pour se procurer certains cours, ceux de chimie de Fourcroy, et surtout celui d'analyse de Lagrange. Les étudiants étant encouragés à communiquer leurs remarques aux enseignants, elle écrit au célèbre Lagrange, sous le pseudonyme de Monsieur Leblanc. C'est d'une très grande audace. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) est surnommé l'illustrissime. Il est un des plus prestigieux savants de l'époque.

Cependant Lagrange est impressionné par les observations remarquables de cet élève Leblanc et veut le rencontrer. Elle doit dévoiler son identité. Lagrange est bien sûr étonné, mais décide de l'aider. Elle devient célèbre dans le Tout-Paris. On veut absolument rencontrer cette femme prodigieuse. Elle apprécie peu ce genre de renommée. Elle répètera souvent qu'elle ne veut pas être une « femme savante », elle ne veut pas tenir salon. Son espoir le plus profond est de devenir MATHÉMATICIEN, au sens plein du terme. Ce qui implique de refuser les sortes d'hommages que l'on fait à certaines dames. Par exemple, Jean-Baptiste Gaspard D'Ansse de Villoison (1750-1805), helléniste distingué et poète à ses heures en sera pour ses frais :

P. S. — Vous m'avouerez, Mademoiselle, que si vous êtes la seule demoiselle qui possède si supérieurement les mathématiques, vous êtes aussi la seule qui ait connu et redouté le danger d'un poème grec⁽¹¹⁾.

Elle avait aussi repoussé, avec dédain et hauteur semble-t-il, l'astronome Jérôme Lalande (1732-1807) qui lui offrait un de ses ouvrages, l'Astronomie des Dames⁽¹²⁾, à elle qui avait lu Newton dans le texte ! Cette attitude qui semble à certains peu aimable est tout ce qu'elle peut trouver pour sauver son projet.

La théorie des nombres et la troisième audace de Sophie

Elle se prend de passion pour la théorie des nombres en lisant le dernier ouvrage du mathématicien Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, paru en 1798. Sophie commence à échanger avec lui. Il deviendra son guide privilégié en mathématiques.

Elle s'intéresse en particulier à un théorème célèbre (plutôt une conjecture à cette

(11) Lettre D'Ansse de Villoison à Sophie Germain, le 14 juillet 1802

(12) *L'Astronomie des Dames* fait partie d'une collection d'ouvrages, la Bibliothèque universelle des dames, commencée en 1785, « conçue comme une collection d'œuvres pour donner une éducation générale, facilement disponible, aux femmes d'une certaine classe pour leur épargner du travail, et leur fournir des connaissances utiles et agréables. »

époque) connu maintenant sous le nom de *grand théorème* ou *dernier théorème de Fermat*.

Lisant la traduction des *Arithmétiques* de Diophante, faite en 1621 par Bachet de Méziriac (1581-1638), Pierre de Fermat (? – 1665) avait écrit dans la marge : « *Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir* »

Autrement dit : l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution en nombres entiers non nuls pour $n > 2$. Comme de nombreux résultats d'arithmétique, l'énoncé en est très simple. Mais la preuve parfois très ardue. Elle sait que Fermat a sans doute démontré l'impossibilité de son équation pour $n = 4$, et que le grand Euler l'a démontré pour $n = 3$. Elle ne peut évidemment se douter que la preuve générale ne sera apportée qu'en 1994-1995 à peu près deux cents ans plus tard par Andrew Wiles (né en 1953).

En 1801 paraissent les *Disquisitiones arithmeticae* (Recherches arithmétiques) de Carl Gauss (1777-1855). C'est un ouvrage très novateur en arithmétique, où Gauss introduit en particulier la notion de congruence. Il ne sera traduit en français qu'en 1807, mais Sophie, nous l'avons noté, a appris le latin : elle s'y plonge dès 1802, s'initie à ces nouvelles façons de traiter l'arithmétique. Elle sera une des premières, parmi les mathématiciens, à les comprendre et à utiliser les nouvelles notations. Au fil de sa lecture, elle note des remarques et se pose quelques nouveaux problèmes auxquels elle essaie de donner des réponses. Elle a besoin d'avis et de conseils. Qui mieux que Gauss peut les lui offrir ?

RECHERCHES ARITHMÉTIQUES.

SECTION PREMIÈRE.

Des Nombres congrus en général.

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c , b et c sont dits *congrus* suivant a , sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c , *résidus* de l'autre dans le premier cas, et non *résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est-à-dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et non *résidu* par rapport au module 5.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m , sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer

RECHERCHES

peuvent sans peine se démontrer par-là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe \equiv , en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9 \pmod{5}$, $-7 \equiv 15 \pmod{11}$ (*).

3. THÉORÈME. Soient m nombres entiers successifs a , $a+1$, $a+2$, ... $a+k-1$ et un autre A , un des premiers sera congru avec A , suivant le module m , et il n'y en aura qu'un.

En effet, si $\frac{a-A}{m}$ est entier, on aura $a \equiv A$; s'il est fractionnaire, soit k le nombre entier, immédiatement plus grand ou plus petit, suivant que $\frac{a-A}{m}$ sera positif ou négatif, en ne faisant point d'attention au signe, $A+k m$ tombera nécessairement entre a et $a+k m$; ce sera donc le nombre cherché. Or il est évident que les quotiens $\frac{a-A}{m}$, $\frac{a+1-A}{m}$, etc., sont compris entre $k-1$ et $k+1$, donc un seul d'entre eux peut être entier.

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite 0, 1, 2, ... $(m-1)$, que dans celle-ci 0, -1 , -2 , ... $-(m-1)$; nous les appellerons *résidus minimaux* ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $\equiv \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons *résidu minimum absolu*.

Par exemple -15 suivant le module 5, a pour résidu *minimum*

(*) Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguïté.

Troisième audace donc, elle écrit au « Prince des mathématiciens », le 21 novembre 1804. Elle veut cependant être jugée sans condescendance, sans être considérée, au mieux, comme une « femme savante ». Elle use donc une nouvelle fois du pseudonyme de M. Leblanc. Et Gauss est « stupéfié » par la maîtrise de ses *Disquisitiones* dont fait preuve ce M. Leblanc, et par les démonstrations « si fines » de certains résultats sur les nombres premiers. Ainsi commence une correspondance relativement assidue, qui va constituer longtemps la seule trace des travaux de Sophie en théorie des nombres⁽¹³⁾, mais prise très au sérieux par un Gauss habituellement avare de ses compliments, ce qui en indique le niveau.

En 1806 Napoléon envahit la Prusse, et la ville de Brunswick où demeure Gauss est assiégée. Sophie prend soudain peur et veut éviter à cette gloire des mathématiques de subir le sort d'Archimède. Elle charge un ami de sa famille, le général Pernéty, de veiller sur lui. Ce faisant l'identité de M. Leblanc sera dévoilée. La correspondance échangée entre le général, Sophie, puis Gauss, conte des péripéties savoureuses qui feraient presque sourire, s'il n'y avait ce sentiment que M^{elle} Germain joue ici tout son avenir de mathématicien. Gauss, évidemment très surpris, marque cependant encore plus d'admiration pour les talents de M. Leblanc devenu Sophie Germain.

« Comment vous décrire mon admiration et mon étonnement de voir mon estimé correspondant Monsieur Le Blanc se transformer en ce fameux personnage qui me donne un brillant exemple de ce que j'aurais du mal à croire. Le goût des sciences abstraites en général et plus particulièrement des mystères des nombres est extrêmement rare. Les charmes de cette sublime science ne se révèlent qu'à ceux qui ont le courage de l'explorer en profondeur. Mais quand une personne du sexe qui, du fait de nos coutumes et préjugés, doit surmonter plus de difficultés que les hommes pour se familiariser avec ces épineuses questions, réussit néanmoins à dépasser ces obstacles et à appréhender leur partie la plus obscure, alors elle doit sans aucun doute posséder un noble courage, des talents extraordinaires et un esprit supérieur. »

(Lettre du 30 avril 1807)

À la grande déception de Sophie, Gauss, pris par d'autres préoccupations et d'autres sujets de recherche, suspendra cette correspondance peu après.

Les surfaces élastiques et la quatrième audace de Sophie

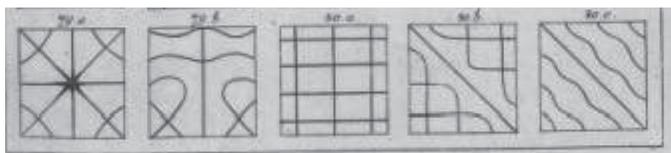
L'estime de savants, même des plus grands, ne peut lui suffire. Il lui faudrait une reconnaissance institutionnelle, ce qui est quasi inaccessible pour une femme à son époque. Une occasion va se présenter qu'elle va saisir, non sans audace une fois de plus.

En 1808, Ernst Chladni⁽¹⁴⁾, de passage à Paris, présente une partie de ses expériences sur la vibration des surfaces élastiques, et ses « figures sonores ». Une surface, par

(13) Une partie de cette correspondance est publiée dans l'ouvrage d'Hippolyte Stupuy cité plus haut.

(14) Ernst Chladni (1756-1827), physicien allemand considéré comme le fondateur de l'acoustique moderne. A publié en 1802 : *Die Akustik*.

exemple métallique, recouverte d'une mince pellicule de sable, vibre lorsqu'un de ses côtés est frotté par un archet, et des sons sont émis, comme le ferait une corde de violon. Mais les nœuds et les ventres de la corde sont ici remplacés par des figures qui apparaissent presque magiquement dans le sable⁽¹⁵⁾.



Dessins extraits de l'ouvrage de Chladni

L'Institut de France (créé en 1795 et qui remplace les Académies supprimées par la Révolution en 1793) lance un concours à l'instigation de Napoléon, pour « que ces vibrations soient soumises au calcul, formuler une théorie mathématique des surfaces élastiques et montrer qu'elle est en accord avec les résultats expérimentaux ».

Le problème est si difficile que même les plus brillants analystes, comme Joseph Louis Lagrange, renoncent. Sophie se présentera seule au concours. Sa formation d'autodidacte comporte beaucoup de lacunes, en analyse en particulier. Elle a lu tout ce qui a été écrit au siècle précédent sur les cordes vibrantes, mais le problème est ici d'un autre ordre.

Elle présente un premier mémoire en 1811, sans succès. Le concours est reconduit pour 1813. Elle a conscience de ses faiblesses et demande à certains de ses amis, comme Legendre, de l'aider. Mais elle a aussi gagné des ennemis farouches, comme Siméon Denis Poisson (1781-1840), qui a des relations parmi les membres de l'Institut. Ce monde n'est pas exempt de rivalités et de batailles d'influences, mais Sophie est particulièrement isolée ; elle n'accède que très difficilement aux travaux d'autres savants, et est mise souvent très tardivement au courant de l'actualité scientifique. Le mémoire qu'elle présente en 1813 reçoit cependant une mention très honorable. L'inimitié de Poisson ne fait que croître. Il critique en particulier les hypothèses physiques sur lesquelles s'appuie Sophie⁽¹⁶⁾. L'histoire montrera que c'est plutôt Sophie qui a raison. Quoi qu'il en soit, même si ses justifications mathématiques sont parfois faibles, tout le monde s'accorde sur la justesse de l'équation à laquelle elle aboutit.

Son nouveau mémoire de 1815 est couronné de succès. Elle obtient le prix.

C'est un événement du tout Paris. Une femme a obtenu, pour la première fois, un prix de l'Institut de France ! Le public venu nombreux le 8 janvier 1816 pour voir « cette virtuose d'un genre nouveau » fut cependant déçu. Elle ne vint pas. Peut-être parce que J-B. Delambre, le secrétaire de l'Institut, avait « oublié » de lui envoyer des billets pour qu'elle et ses proches puissent venir ? De fait les dames bien sûr ne

(15) Ces expériences sont toujours réalisées au Palais de la découverte.

(16) Ses mémoires de 1821 et 1826 reflètent toute cette période de recherches, de tâtonnements, et la façon dont Poisson en particulier a essayé de la déconsidérer.

pouvaient être académiciennes ni membre de l'Institut⁽¹⁷⁾, et les seules qui jusqu'alors pouvaient assister aux séances étaient les « épouses de ». Il faudra attendre 1823 pour que Sophie soit admise de plein droit à assister aux séances de l'Académie des sciences, grâce à son ami Joseph Fourier (1768-1830) qui en est devenu le Secrétaire perpétuel. Elle sera la première femme à obtenir ce droit.

A-t-elle gagné la reconnaissance de ceux qu'elle voudrait considérer comme ses pairs ? Loin s'en faut. Elle reste étrangère à la communauté scientifique, et en souffre. « *Je me trouve presque aussi étrangère au mouvement des sciences que si j'habitais un autre pays. (...) Vous ne croiriez peut-être pas qu'étant au milieu de Paris je ne puisse réussir à voir un Monsieur Savart⁽¹⁸⁾ qui a fait mille expériences curieuses. Il les montre à des gens qui n'en peuvent tirer aucun parti. Ces faits sont de mon domaine et c'est à moi seule qu'ils restent cachés. Voilà le privilège des dames, elles obtiennent des compliments et aucun avantage réel* » se plaindra-t-elle à son ami Guglielmo Libri en 1826.

En effet, elle a continué de travailler sur les surfaces élastiques, publiant à son compte un mémoire en 1821⁽¹⁹⁾. Elle a refait elle-même une grande partie des expériences, montrant par ailleurs une très grande connaissance de la théorie musicale.

Les dernières audaces de Sophie

En décembre 1815, à la session même où Sophie Germain était désignée comme gagnante du concours sur les surfaces élastiques, l'Institut de France, établissait un nouveau concours portant sur la résolution du *dernier théorème* de Fermat. Ses travaux sur les surfaces élastiques occupent alors largement l'esprit de notre héroïne, mais on découvrira que finalement « *elle n'a jamais cessé de penser à la théorie des nombres* », dans une lettre à Gauss de 1819, longtemps méconnue.

Faute de réponses satisfaisantes, l'Académie des sciences⁽²⁰⁾ a remis le sujet au concours deux fois, puis l'a retiré en 1821. Il semble, sans certitude, que Sophie Germain ne soumit pas de mémoire, même si l'étude de ses papiers retrouvés tardivement montre qu'elle avait mis en ordre nombre de ses recherches sur l'impossibilité de l'équation de Fermat.

Cherchant probablement un avis sur ce travail, elle a écrit à Gauss, et a chargé un de ses amis, rencontré à Paris, de lui transmettre cette missive. C'est la fameuse lettre de mai 1819, où elle explique son « grand plan » pour la résolution du théorème de Fermat. C'est une nouvelle audace de Sophie, car elle n'a plus eu de nouvelle de Gauss depuis 1809. Et hélas Gauss ne lui répondra pas. Le destin est ainsi fait que la seule trace de ses travaux sur la théorie des nombres résidera dans la mention qu'en

(17) Yvonne Choquet-Bruhat sera la première femme académicienne des sciences, en 1979.

(18) Félix Savart (1791-1841), célèbre pour ses travaux en acoustique. Son nom a été donné à une unité de mesure des intervalles musicaux, basée sur une échelle logarithmique.

(19) *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques par Melle Sophie Germain*, Mme veuve Courcier, librairie pour les sciences, Paris, 1821.

(20) En mars 1816, Louis XVIII a fait renaître les Académies.

fait Legendre dans la note de bas de page du *second supplément de sa Théorie des nombres* de 1825.

« Cette démonstration qu'on trouvera sans doute très ingénieuse est due à M^{lle} Sophie Germain qui cultive avec succès les sciences physiques et mathématiques comme le prouve le prix qu'elle a remporté à l'académie des sciences sur les vibrations des lames élastiques. »

Et ce n'est toutefois pas rien, puisque l'on considère que c'était le résultat le plus important sur le théorème de Fermat entre ceux d'Euler de 1753, et ceux de Kummer en 1840.

Elle essaie en effet de démontrer l'impossibilité de l'équation de Fermat pour une famille potentiellement infinie d'exposants premiers, plutôt que la démarche au cas par cas sur certains exposants. C'est ainsi qu'elle montre que le théorème de Fermat est vérifié pour les exposants premiers n supérieurs strictement à 2, tels que $2n + 1$ est aussi premier. Ce sont les nombres appelés depuis « nombres premiers de Sophie Germain ». Nous donnons en annexe quelques éléments sur ces nombres.

L'étude de la fameuse lettre de 1819, et celle, toujours en cours, des manuscrits retrouvés à la fin du XX^e siècle, montrent qu'elle avait fait beaucoup plus, et que plusieurs de ses résultats ne furent indépendamment redécouverts que plus tard. Elle y évoque par exemple la « métaphysique » de sa méthode, que lui a fournie la lecture d'un article de Louis Poinsot (1777-1869) « *Sur l'algèbre et la théorie des nombres* » lu à l'Académie en 1817. Elle en retient l'idée qu'il est sans doute nécessaire de faire des détours par l'algèbre, et sortir du domaine propre des nombres entiers, y compris user des « quantités imaginaires »⁽²¹⁾ comme $\sqrt{-1}$, pour traiter de questions d'arithmétique.

Son isolement, sa marginalité parce qu'elle était une femme, ont fait que ses impressionnants travaux auraient pu passer totalement inaperçus. Ce sont d'abord ses écrits philosophiques qui ont peut-être contribué à la tirer de l'oubli. À sa mort, son neveu, Armand-Jacques Lherbette, ayant trouvé dans les papiers de sa tante un petit opuscule « *Considérations générales sur l'état des sciences et des lettres* » le publie « pour remplir un devoir pieux envers sa mémoire », doutant de l'accueil qui lui sera fait. En fait, Auguste Comte appréciera grandement cet ouvrage posthume « qui indique en elle une philosophie très élevée, à la fois sage et énergique, dont bien peu d'esprits supérieurs ont aujourd'hui un sentiment aussi net et aussi profond ». Il attirera alors l'attention d'autres philosophes et adeptes du positivisme, dont Hippolyte Stupuy qui s'attachera en 1879 à faire revivre le souvenir de Sophie Germain qui était alors totalement oubliée.

Elle était morte d'un cancer en 1831, après des mois de souffrances. Selon son certificat de décès, elle était « rentière » : la fortune familiale l'avait certes mise à

(21) C'était le nom utilisé habituellement pour désigner ce que nous nommons maintenant les nombres complexes. Une des grandes questions de ce début du XIX^e siècle était de donner du sens à ces « quantités » qui n'étaient pas encore des nombres. Gauss y a contribué.

l'abri des soucis financiers, mais son époque ne lui avait pas laissé d'autres choix. Et même si son ami Libri écrivait en 1832 : « *Telle fut cette femme supérieure qui de toutes a poussé le plus loin les études mathématiques. (...) La théorie du son et l'analyse indéterminée feront longtemps vivre son nom* », même s'il semble que Gauss lui avait obtenu le titre de Docteur honoris causa de l'Université de Göttingen, qu'elle ne put recevoir, décédée trop tôt, ses contemporains l'oublièrent très vite.

Lors de la construction de la Tour Eiffel entre 1887 et 1889, furent inscrits les noms de 72 savants « parmi les plus marquants du XIX^e siècle ». Le nom de Sophie Germain n'y figure pas, ni celui d'aucune femme d'ailleurs.

En 1896, Hippolyte Stupuy pouvait cependant écrire :

« Sophie Germain a repris cette seconde vie qui est faite du souvenir des vivants : son œuvre et sa biographie ont conquis leur place dans la mémoire des hommes ; son tombeau, délaissé, a été retrouvé et restauré ; le Conseil municipal de Paris, toujours soucieux des gloires parisiennes, a donné le nom de Sophie Germain à l'une des rues de la Capitale, à l'une de ses écoles supérieures de jeunes filles, et son buste, reconstitué d'après la tête phrénologique qui existe au Muséum d'histoire naturelle, orne la cour principale de cette école. De plus, une plaque commémorative a été apposée sur la maison où elle est morte.⁽²²⁾ »

Sur cette plaque commémorative, elle était enfin :

« Sophie Germain philosophe et mathématicienne. »

Notre héroïne fait cependant partie de la longue liste de ces femmes méconnues ou mal reconnues, et serait peut-être demeurée au rang des invisibles de l'histoire sans l'intervention d'Hippolyte Stupuy. De fait, jusqu'à la fin du XIX^e siècle, peu de femmes ont laissé leur nom en mathématiques, et la première moitié du XX^e siècle est encore très parcimonieuse. Combien peut-être ont vu leur nom disparaître au profit du mari, du frère, combien de femmes n'ont pu ou n'ont pas osé développer leur penchant pour les mathématiques, nous privant ainsi de la moitié de l'intelligence de l'humanité, comme le disait Ada Yonath en 2009⁽²³⁾...

Rappeler l'histoire de ces pionnières, faire connaître leur contribution à la construction des mathématiques, qui malgré tout demeure souvent méconnue, permet de faire prendre conscience que même lorsque l'on croit qu'enfin tout est gagné, de nombreux stéréotypes restent encore à combattre.

(22) La plaque commémorative est toujours sur la maison où elle est décédée, et le buste est toujours dans la cour de ce qui est devenu le lycée Sophie Germain.

(23) L'israélienne Ada Yonath a reçu le prix Nobel de chimie en 2009. Elle était la quatrième femme à l'obtenir. Lors d'une interview après la remise de ce prix, elle déclarait : « Women make up half the population. I think the population is losing half of the human brain power by not encouraging women to go into the sciences. Women can do great things if they are encouraged to do so. »

**Annexe 1 :**

Les « nombres premiers de Sophie Germain »

Un nombre premier de Sophie Germain est un nombre premier tel que son double plus un est aussi premier.

p est un nombre premier de Sophie Germain si $2p + 1$ est aussi premier.

11 et $2 \times 11 + 1 = 23$ sont tous deux premiers. Donc 11 est un nombre premier de S. G.

13 n'est pas un nombre premier de Sophie Germain.

Une séquence (chaîne de Cunningham) apparaît lorsque le nombre associé ($2p + 1$) est lui-même un nombre premier de Sophie Germain.

Exemple de séquence à quatre termes: $2, 2 \times 2 + 1 = 5, 2 \times 5 + 1 = 11, 2 \times 11 + 1 = 23$.

En effet $2 \times 23 + 1 = 47$ est premier, mais pas $2 \times 47 + 1 = 95$; la séquence s'arrête là.

Les premiers nombres premiers de Sophie Germain :

2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 179, 191, 233, 239, 251, 281, 359, ...

On ne sait pas s'il en existe une infinité, on le conjecture.

Annexe 2 :

Une première remarque :

À partir des travaux de Sophie Germain et de ses contemporains, il était d'usage de séparer en deux cas l'étude sur le théorème de Fermat (sachant que l'on peut ne retenir que les exposants n premiers impairs, et se limiter à x, y et z premiers entre eux):

Cas 1 : démontrer que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en nombres entiers non nuls quand $n > 2$ et n ne divise pas le produit xyz .

Cas 2 : démontrer que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions en nombres entiers non nuls quand $n > 2$ et n divise le produit xyz .

Un théorème de Sophie Germain :

Si n est un nombre premier impair et s'il existe un autre nombre premier « auxiliaire » m vérifiant les deux conditions :

(1) $x^n \equiv n \pmod{m}$ est impossible

(2) Si lorsque $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{m}$ (avec x, y et z premiers entre eux) alors m divise le produit xyz ,

Alors pour n'importe quelle solution de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$, n est forcément diviseur de xyz .

On trouvera des éléments de la démonstration qu'aurait pu faire Sophie Germain (d'après ses manuscrits retrouvés) dans les références I et IV données à la fin de cet article.

Quelques références accessibles :

Pour en apprendre plus sur Sophie Germain et son époque :

1- Un livre en cours d'écriture par Christine Charreton et moi-même, à destination des élèves de collèges et lycées : « *Je suis Sophie Germain* », qui devrait paraître chez Jacques André éditeur.

2- Hippolyte, Stupuy, « Étude sur la vie et les œuvres de Sophie Germain », *Œuvres philosophiques de Sophie Germain*, Librairie de Firmin-Didot et Cie, 1) éd. 1879, 2^e éd. 1896. (téléchargeable sur <http://gallica.bnf.fr/>)

Sur ce même site de la bibliothèque nationale de France, il est possible d'accéder aux mémoires de Sophie Germain sur les surfaces élastiques, et aux recherches arithmétiques de C. Gauss, par exemple.

Pour en apprendre plus sur les mathématiques de Sophie Germain :

I - Andrea Del Centina, « La genèse du théorème de Sophie Germain », in *Les génies de la science*, n° 26, février-mai 2006, p. 14- 17.

II - Jean-Pierre Friedelmeyer, « Une lettre de Sophie germain à Carl Friedrich Gauss (20 février 1804), et la réponse de celui-ci (30 avril 1807) », sur le site *Images des mathématiques*. (http://images.math.cnrs.fr/_Friedelmeyer_.html)

III - Jenny Boucard, « Résidus et congruences de 1750 à 1850 : une diversité de pratiques entre algèbre et théorie des nombres », in Christian Gilain et Alexandre Guilbaud (dir.), *Les sciences mathématiques 1750-1850 : continuités et ruptures*, CNRS Éditions, Paris, 2015, p. 509-540.

IV - R. Laubenbacher, D. Pengelley, « Voici ce que j'ai trouvé: » *Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem*, in *Historia mathematica*, vol 37, novembre 2010, p. 641-692. (En anglais, un peu difficile mais très pédagogique)