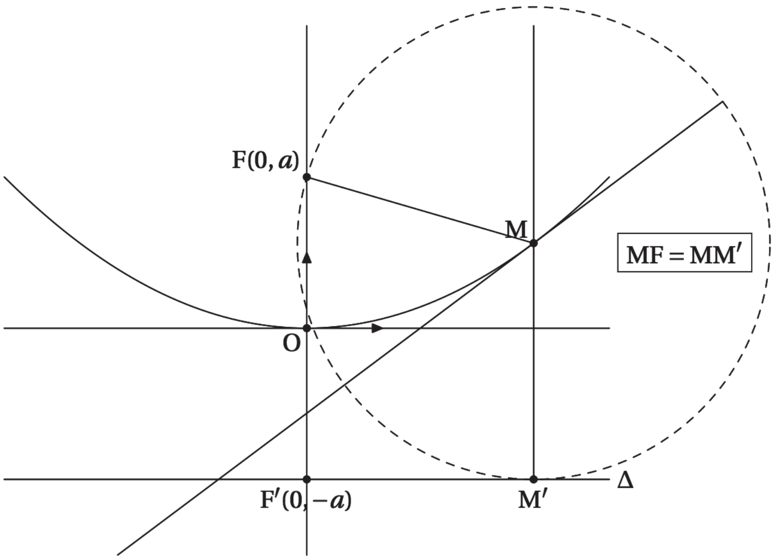
Tangentes à la parabole

Pour construire un point M, on se donne un point M′ sur la directrice, le point M se trouve à l'intersection de la médiatrice de [M′F] avec la perpendiculaire à la directrice issue de M′.
La médiatrice est alors la tangente à la parabole. En effet :



Considérons un repère orthonormal dont l'origine est le milieu O de [FF′]. Nous avons alors ($a \neq 0$) :

$$F(0,\ a)\ ;\ F'(0,\ -a)\ ;\ M(x,\ y)\ ;\ M'(x,\ -a)\ ;\ MF = MM'$$

$$MM' = MF \Leftrightarrow MF^2 = MM'^2 \Leftrightarrow (x-x)^2 + (y+a)^2 = (0-x)^2 + (a-y)^2$$

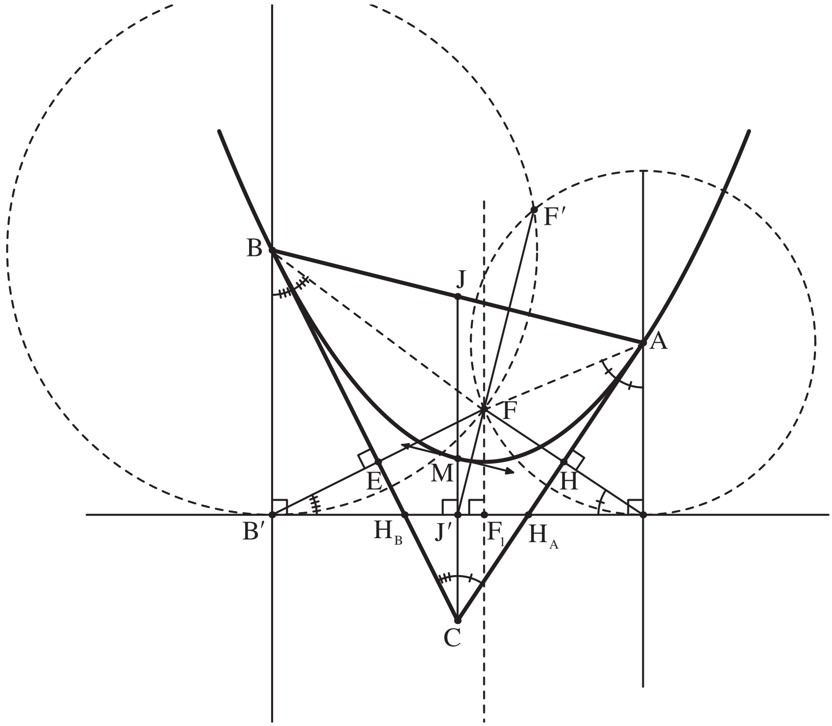
$$\Leftrightarrow y = f(x) = \frac{1}{4a}x^2.$$

Le coefficient directeur de la tangente en $M_0(x_0,\ y_0)$ est : $f'(x_0) = \frac{1}{2a}x_0$.

La médiatrice de $[M_0F]$ a pour coefficient directeur : $\frac{x_0}{2a}$.

$$\overrightarrow{M'F}\begin{pmatrix} x_0 \\ -2a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2a \\ x_0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_0}{2a} \end{pmatrix}.$$

La tangente et la médiatrice ont même coefficient directeur, elles passent par M_0 ; elles sont donc confondues.



Analyse

Supposons le problème résolu.

Diamètre :

Soient A et B deux points construits comme indiqués précédemment. A′ et B′ sont leurs projections orthogonales respectives sur la directrice Δ.

A et B sont les centres des cercles C_A et C_B de rayons AF et BF respectivement.

Ces deux cercles se coupent en un autre point F′. La droite *f* = (FF′) coupe Δ en J′. Si F = F′, on considère la droite *f* tangente commune aux deux cercles.

On a (puissance d'un point par rapport à un cercle) :

$$J'F \times J'F' = J'A'^2 = J'B'^2 \Rightarrow J'A' = J'B'.$$

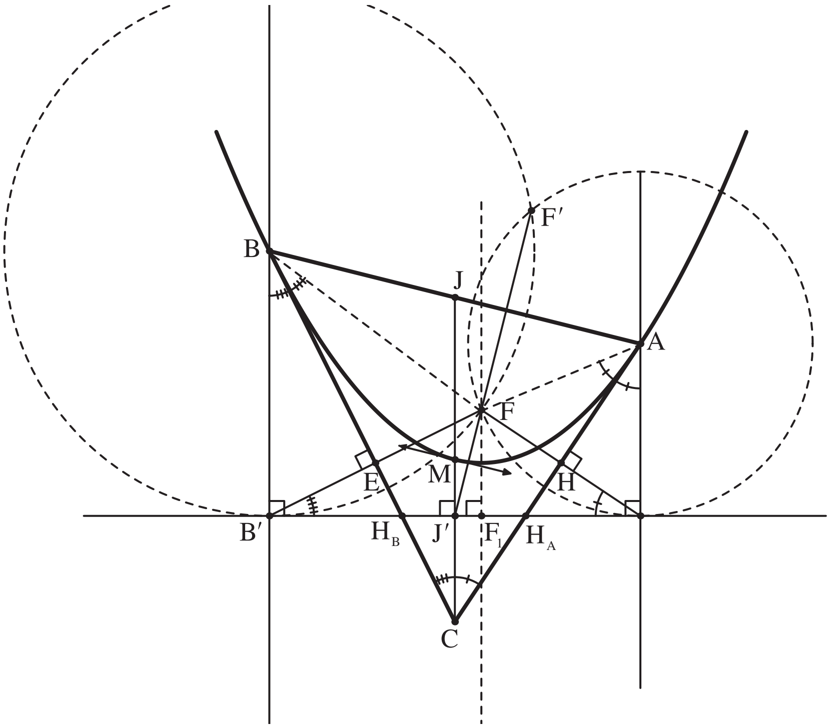
Ainsi J′ est le milieu de [A′B′].

La droite *f* est perpendiculaire à la droite (AB). Elle passe par le point fixe F. Si l'on considère deux autres points A et B situés sur une autre corde à la parabole parallèle à (AB), le point J′ ne changera pas.

Soit J le projeté de J′ sur (AB) parallèlement à l'axe (FF_1). C'est le milieu du segment [AB] et (JJ′) est la médiatrice de [A′B′].

Ainsi :

Le lieu des milieux des cordes d'une parabole parallèles à une direction (AB) est une droite parallèle à l'axe ; cette droite est appelée diamètre de la parabole relativement à la corde [AB]. Cette corde



Analyse

Supposons le problème résolu.

Diamètre :

Soient A et B deux points construits comme indiqués précédemment. A′ et B′ sont leurs projections orthogonales respectives sur la directrice Δ.

A et B sont les centres des cercles C_A et C_B de rayons AF et BF respectivement.

Ces deux cercles se coupent en un autre point F′. La droite f = (FF′) coupe Δ en J′. Si F = F′, on considère la droite f tangente commune aux deux cercles.

On a (puissance d’un point par rapport à un cercle) :

$$J'F \times J'F' = J'A'^2 = J'B'^2 \Rightarrow J'A' = J'B'.$$

Ainsi J′ est le milieu de [A′B′].

La droite f est perpendiculaire à la droite (AB). Elle passe par le point fixe F. Si l’on considère deux autres points A et B situés sur une autre corde à la parabole parallèle à (AB), le point J′ ne changera pas.

Soit J le projeté de J′ sur (AB) parallèlement à l’axe (FF_1). C’est le milieu du segment [AB] et (JJ′) est la médiatrice de [A′B′].

Ainsi :

Le lieu des milieux des cordes d’une parabole parallèles à une direction (AB) est une droite parallèle à l’axe ; cette droite est appelée diamètre de la parabole relativement à la corde [AB]. Cette corde