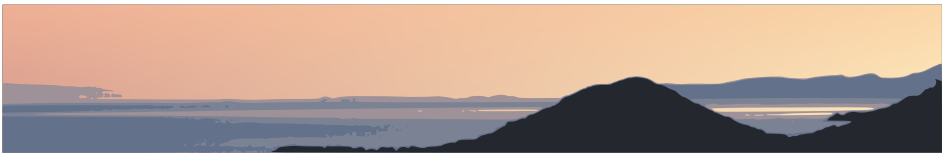
Épreuve I

Académie de Corse

Exercice 1. Voyage Corse-Italie



Depuis la place de Monticello en Balagne (Haute Corse), les jours de grande visibilité, on peut observer la chaîne de montagnes des Apennins du Nord, en Italie. On observe en fait le parc des Apennins d'Émilie-Toscane, dont le point culminant est le Mont Prado (2 053 m).

La figure I.1, qui n'est pas à l'échelle, représente une coupe de la sphère terrestre par un plan passant par son centre O.

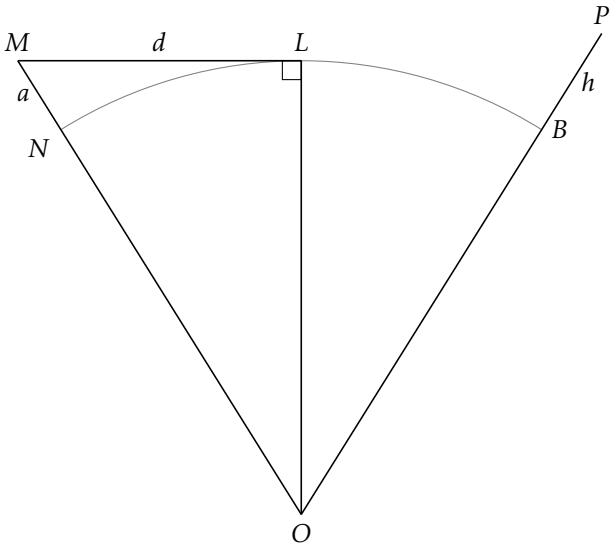


Figure I.1

Les points M et P représentent respectivement la place de Monticello et le sommet du Mont Prado. On donne le rayon terrestre $R = 6\,370\,\text{km}$. On indique que le Mont Prado culmine à l'altitude $h = BP = 2\,053\,\text{m}$ et que la place de Monticello se trouve à l'altitude $a = MN = 218\,\text{m}$. La distance de B à N est $215\,\text{km}$; cette distance correspond à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BN}$ de la figure.

Rappel

La longueur l d'un arc d'un cercle de rayon r intercepté par un angle au centre de mesure α (exprimé en degrés) est $l = \dfrac{\alpha\pi}{180} \times r$.

1. Depuis la place de Monticello, certains points, comme L, sont situés à l'horizon, au niveau de la mer. On souhaite calculer la distance $d = ML$.
   a. Montrer que $d = \sqrt{2Ra + a^2}$. Donner une valeur approchée de d à un mètre près.
   b. Quelle est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{NL}$? Comparer cette longueur avec d.
   c. On pose $d' = \sqrt{2Ra}$. Que remarque-t-on ?
2. Déterminer la hauteur à partir de laquelle la paroi du Mont Prado est visible depuis la place de Monticello. Quel paradoxe obtient-on ?
3. La réfraction de la lumière et la rotondité de la Terre expliquent ce paradoxe : l'atmosphère se comporte comme une succession de dioptres courbes, ce qui améliore la distance de visibilité théorique. On admet que la distance e à l'horizon optique depuis la place de Monticello, supérieure à la distance d théorique, est donnée par la formule : $e = \sqrt{\dfrac{2Ra}{0,83}}$, où $0,83$ est un coefficient de correction dû à la réfraction atmosphérique.

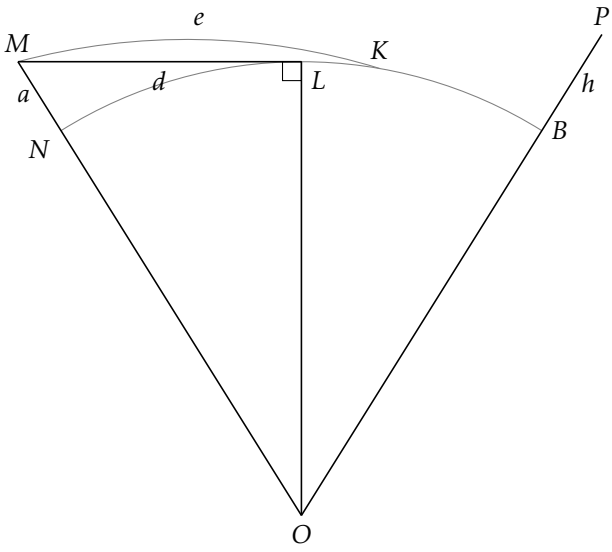


Figure I.2

e correspond à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MK}$ sur la figure I.2.

a. Calculer la distance e à l'horizon optique depuis la place de Monticello. Donner une valeur approchées de e à un mètre près.

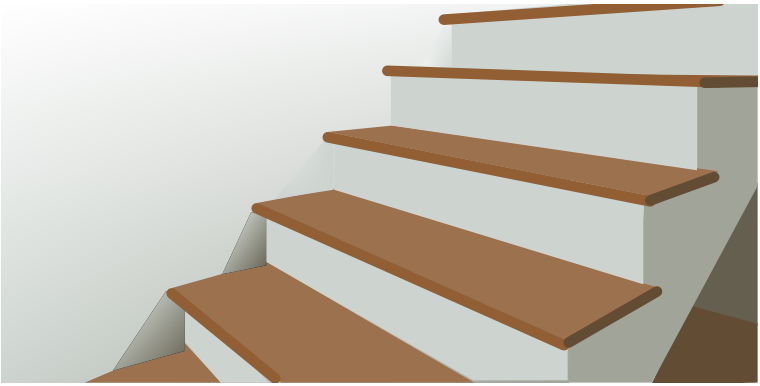
b. Soit S un point du segment $[BP]$ (sur la paroi du Mont Prado). De même, exprimer la distance e' à l'horizon optique depuis le point S en fonction de la distance BS.

c. On admet que S correspond au point d'altitude minimale visible depuis la place de Monticello si $e + e' = 215\,\text{km}$ (e et e' étant exprimées en km).

Calculer la longueur de la paroi du Mont Prado visible depuis la place de Monticello.

Exercice 2. En marches !

Monter des escaliers en forçant le moins possible ? Et s'il existait une formule pour construire l'escalier idéal ?



Au XVIIIe siècle, l'architecte François Blondel s'est penché sur le problème.
On appelle *contremarche* chaque partie verticale d'un escalier. On appelle *marche* chaque partie horizontale d'un escalier. La *contremarche* est perpendiculaire à la *marche*.

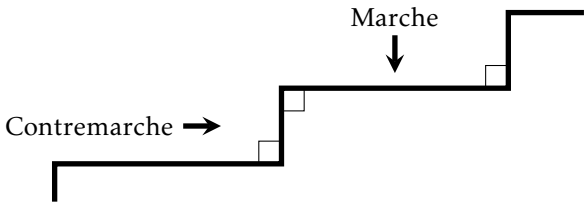


FIGURE I.3

On note :

- n le nombre de contremarches constituant l'escalier, c'est-à-dire le nombre d'élévations. n est un entier supérieur ou égal à 2 ;
- x la profondeur (en cm) d'une marche et y la hauteur de la contremarche (en cm) ;
- Δx la profondeur totale de l'escalier (en cm) et Δy sa hauteur totale (en cm).

Sur la figure I.4, on a représenté un escalier de 5 marches. Les marches et les contremarches ont des dimensions constantes. On peut donc parler de l'angle α que l'escalier fait avec l'horizontale.
D'après François Blondel, un *escalier confortable* doit vérifier :

$$\begin{cases} x + 2y = & 65 \\ x \geqslant & 25 \\ y > & 0. \end{cases}$$

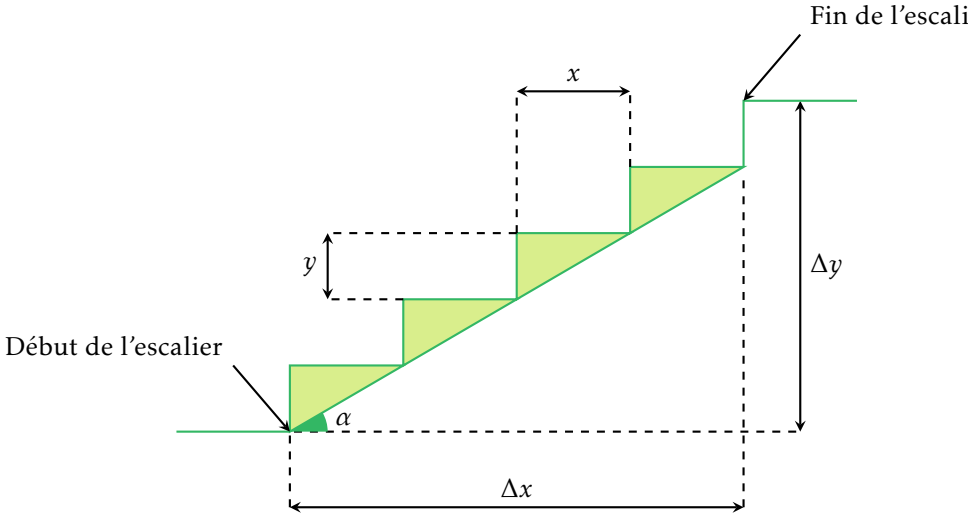


FIGURE I.4

On appelle *escalier idéal* tout escalier confortable dont les marches sont toutes identiques et les contremarches toutes identiques.

1. On considère un escalier idéal constitué de 5 contremarches tel que $x = 30$. Montrer que $\Delta x = 120$ et $\Delta y = 87,5$.

2. **a.** On considère les valeurs : $\Delta x = 25$ et $\Delta y = 40$. Montrer qu'il est possible de réaliser un escalier idéal. Préciser le nombre de contremarches dans ce cas.

b. Marie affirme que : « Avec les conditions imposées pour construire un escalier idéal, on a forcément $x > y$, donc il est impossible de construire un escalier idéal tel que $\Delta x \leqslant \Delta y$ ».

L'affirmation de Marie est-elle correcte ?

3. Dans cette question, on suppose que $\Delta x = 25$ et $\Delta y = 42$.

a. Montrer qu'avec ces valeurs il est impossible de construire un escalier idéal ayant deux contremarches.

b. Montrer qu'avec ces valeurs il est impossible de construire un escalier idéal ayant n contremarches, quelle que soit la valeur de n supérieure ou égale à 2.

4. Une norme française entrée en vigueur en 2007 impose que, dans les espaces publics, les escaliers vérifient les conditions suivantes : $x \geqslant 28$ et $y = 16$.

Est-il possible de construire un escalier idéal vérifiant ces conditions ? Si oui, déterminer la mesure α de l'angle maximal, on arrondira au degré.

5. Dans toute la suite, on cherche à déterminer pour quelles valeurs de Δx et Δy il est possible de réaliser un escalier idéal.

a. On considère un escalier idéal composé de n contremarches. Montrer que : $\dfrac{\Delta x}{n-1} + 2\dfrac{\Delta y}{n} = 65$.

b. On considère un escalier idéal composé de n contremarches. Montrer que :

$$65(n-1) < \Delta x + 2\Delta y \leqslant 65(n-1) + 40.$$

c. Est-il possible que, pour certaines valeurs de Δx et Δy, il existe deux escaliers idéaux possibles ?

d. Montrer que l'on peut construire un escalier ayant n contremarches si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2\dfrac{\Delta y}{n} & = & \Delta x + 2\Delta y - 65(n-1) \\ \Delta x & \geqslant & 25(n-1) \\ \Delta y & > & 0 \end{cases}$$

e. Est-il possible de construire un escalier idéal tel que $\Delta x = 496$ et $\Delta y = 289$? Si oui, déterminer les valeurs de n, x et y.

6. Écrire un algorithme qui, connaissant Δx et Δy, permet de déterminer si on peut construire un escalier idéal et qui permet aussi de déterminer les valeurs de n, n et y lorsque cet escalier est idéal.

On pourra utiliser les fonctions Partie Entière et Partie Décimale, dont on précise le principe de fonctionnement à travers deux exemples :

Si on choisit le nombre $3,57$ alors : Partie Entière$(3,57) = 3$ et Partie Décimale$(3,57) = 0,57$;

Si on choisit le nombre 3 alors : Partie Entière$(3) = 3$ et Partie Décimale$(3) = 0$.