PROPOSITION V.

THÉORÈME.

L'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Car le parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle ABEF, qui a même base AB et même hauteur BE; or celui-ci a pour mesure $AB \times BE$. Donc $AB \times BE$ est égal à l'aire du parallélogramme ABCD. fig. 97.

Corollaire. Les parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et les parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases : car A, B, C étant trois grandeurs quelconques, on a généralement $A \times C : B \times C :: A : B$.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

L'aire d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

fig. 104. Car le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCE, qui a même base BC et même hauteur AD : or la surface du parallélogramme $= BC \times AD$; donc celle du triangle $= \frac{1}{2} BC \times AD$, ou $BC \times \frac{1}{2} AD$.

Corollaire. Donc deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

La ligne DE, *menée parallèlement à la base d'un triangle* ABC, *divise les côtés* AB, AC, *proportionnellement, de sorte qu'on a* AD:DB :: AE:EC. fig. 114.

Joignez BE et DC, les deux triangles BDE, DEC, ont même base DE; ils ont aussi même hauteur, puisque les sommets B et C sont situés sur une parallèle à la base. Donc ces triangles sont équivalents*. * 2.

Les triangles ADE, BDE, dont le sommet commun est E, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases AD, BD*; ainsi on a * 6.

ADE:BDE :: AD:BD.

Les triangles ADE, DEC, dont le sommet commun est D, ont aussi même hauteur et sont entre eux comme leurs bases AE, EC; donc

ADE:DEC :: AE:EC.

Mais le triangle BDE=DEC; donc, à cause du rapport commun dans ces deux proportions, on en conclura AD:DB :: AE.EC.

Corollaire I. De là résulte *componendo* AD+DB: AD :: AE+EC:AE, ou AB:AD :: AC:AE, et aussi AB:BD :: AC:CE.

fig. 115. *Corollaire* II. *Si entre deux droites* AB, CD, *on mène tant de parallèles qu'on voudra*, AC, EF, GH, BD, etc. *ces droites seront coupées proportionnellement, et on aura* AE:CF :: EG:FH :: GB:HD.

Car soit O le point de concours des droites AB, CD; dans le triangle OEF, où la ligne AC est menée parallèlement à la base EF, on aura OE: AE :: OF:CF, ou OE:OF :: AE:CF. Dans le triangle OGH, on aura semblablement OE:EG :: OF:FH, ou OE:OF :: EG:FH. Donc, à cause du rapport commun, OE:OF, ces deux proportions donnent AE:CF :: EG:FH. On démontrera de la même manière qu'on a EG:FH :: GB:HD, et ainsi de suite. Donc les lignes AB, CD, sont coupées proportionnellement par les parallèles EF, GH, etc.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

fig. 116. *Réciproquement si les côtés* AB, AC, *sont coupés proportionnellement par la ligne* DE, *de sorte qu'on ait* AD:DB :: AE:EC, *je dis que la ligne* DE *sera parallèle à la base* BC.

Car si DE n'est pas parallèle à BC, supposons que DO en soit une ; alors, suivant le théorême précédent, on aura AD:BD :: AO:OC. Mais par hypothèse AD:DB :: AE:EC : donc on auroit AO: OC :: AE : EC ; proportion impossible, puisque d'une part l'antécédent AE est plus grand que AO, et que de l'autre le conséquent EC est plus petit que OC. Donc la parallèle à BC menée par le point D ne peut différer de DE; donc DE est cette parallèle.