Une seule réponse m'est parvenue, celle de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

I) Relations de récurrence

Notons X_n la variable aléatoire X lorsque l'on tire les numéros de 1 à n. On peut obtenir la loi de X_n par récurrence sur n. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont constantes, égales à 1.

Pour un tirage des nombres de 1 à $n + 1$, soit U le dernier numéro tiré. On va examiner les probabilités conditionnelles selon les valeurs de U. Si le numéro U vaut 1 ou $n + 1$, il va directement dans une séquence d'entiers consécutifs et n'augmente donc pas le nombre de séquences. Ainsi, pour tout entier k,

$$P(X_{n+1} = k | U = 1) = P(X_{n-1} = k | U = n+1) = P(X_n = k).$$

Si U prend une valeur $u \in [[2, n]]$, les n premiers numéros tirés sont dans l'un des deux intervalles $[[1, u - 1]]$, ou $[[u + 1, n + 1]]$. En supprimant les numéros de $[[u + 1, n + 1]]$, on obtient un tirage de $u - 1$ nombres appartenant à $[[1, u - 1]]$ pour lequel la variable X_{u-1} prend une valeur a. En supprimant les numéros de $[[1, u - 1]]$, on obtient un tirage de $n + 1 - u$ nombres appartenant à $[[u + 1, n + 1]]$ pour lequel la variable X_{n+1-u} prend une valeur b. La valeur de X_{n+1} est alors égale à $a + b$.

Ainsi, pour tout $u \in [[2, n]]$,

$$\mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1} = k \big| \mathrm{U} = u\big) = \sum_{a=1}^{k-1} \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{u-1} = a\big) \cdot \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1-u} = k - a\big).$$

On en déduit que pour $n \geq 1$,

$$\mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1} = k\big) = \frac{1}{n+1} \sum_{u=1}^{n+1} \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1} = k \big| \mathrm{U} = u\big),$$

ce qui est égal à

$$\frac{2}{n+1} \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_n = k\big) + \frac{1}{n+1} \sum_{u=2}^{n} \sum_{a=1}^{k-1} \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{u-1} = a\big) \cdot \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1-u} = k - a\big).$$

Avec la convention $\mathrm{P}\big(\mathrm{X}_0 = 0\big) = 1$ et $\mathrm{P}\big(\mathrm{X}_0 = k\big) = 0$ pour tout $k \geq 1$, on peut simplifier cette formule :

$$\mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1} = k\big) = \frac{1}{n+1} \sum_{u=1}^{n+1} \sum_{a=0}^{b} \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{u-1} = a\big) \cdot \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1-u} = k - a\big).$$

II) Premières valeurs

Les relations de récurrence établies ci-dessus permettent d'obtenir les premières valeurs :

$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k)$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$n = 3$	2/3	1/3			
$n = 4$	1/3	2/3			
$n = 5$	2/15	11/15	2/15		
$n = 6$	2/45	26/45	17/45		
$n = 7$	4/315	38/105	4/7	17/315	
$n = 8$	1/315	4/21	64/105	62/315	
$n = 9$	2/2835	247/2835	484/945	1072/2835	62/2835

III) Une fonction génératrice globale

On considère maintenant la série formelle à deux variables

$$f(x, y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_n = k\big) x^k y^n.$$

Ainsi,

$$f(x, y) = 1 + xy + xy^2 + \frac{2}{3} xy^3 + \frac{1}{3} x^2 y^3 + \frac{1}{3} xy^4 + \frac{2}{3} x^2 y^3 + \cdots$$

Les formules de récurrence établies dans la partie I peuvent s'écrire, pour $n \geq 1$,

$$(n+1) \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1} = k\big) x^k y^n = \sum_{u=1}^{n+1} \sum_{a=0}^{k} \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{u-1} = a\big) x^a y^{u-1} \, \mathrm{P}\big(\mathrm{X}_{n+1-u} = k - a\big) x^{k-a} y^{n+1-u}.$$

Le premier membre est le terme en $x^k y^n$ de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Le deuxième membre est le

terme en $x^k y^n$ de $f^2(x, y)$. Le seul terme sans y de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est x. Le seul terme sans y de $f(x, y)$ est 1 donc le seul terme sans y de $f^2(x, y)$ est 1 également.

Ainsi, f vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f^2(x,y) - 1 + x,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f^2(x,y) - (1-x)} = 1,$$

ou encore

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y) - \sqrt{1-x}} - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y) + \sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1-x}.$$

En intégrant cela par rapport à y,

$$\ln\left(f(x,y) - \sqrt{1-x}\right) - \ln\left(f(x,y) + \sqrt{1-x}\right) = 2y\sqrt{1-x} + \mathrm{C}(x),$$

où C est une fonction de la seule variable x. Ainsi,

$$\frac{f(x,y) - \sqrt{1-x}}{f(x,y) + \sqrt{1-x}} = \mathrm{K}(x)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right),$$

avec

$$\mathrm{K}(x) = \exp(\mathrm{C}(x)).$$

On trouve $\mathrm{K}(x)$ en remplaçant y par 0 :

$$\mathrm{K}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}.$$

Finalement,

$$f(x,y) = \sqrt{1-x}\,\frac{1 + \mathrm{K}(x)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}{1 - \mathrm{K}(x)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}$$

soit

$$f(x,y) = \sqrt{1-x}\,\frac{1 + \sqrt{1-x} + \left(1 - \sqrt{1-x}\right)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}{1 + \sqrt{1-x} - \left(1 - \sqrt{1-x}\right)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}$$

ou encore

$$f(x,y) = \sqrt{1-x}\,\frac{\mathrm{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right) - \sqrt{1-x}\,\mathrm{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right) - \mathrm{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)},$$

soit enfin

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right)-\sqrt{1-x}\operatorname{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)}{\operatorname{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right)-\dfrac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}}.$$

IV) Une fonction génératrice pour les X_n

Pour n fixé, on pose

$$g_n(x)=\sum_{k\geq 1}\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=k)x^n.$$

On peut obtenir $g_n(x)$ a partir de f :

$$g_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,0).$$

L'espérance de X_n s'obtient par la relation

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=g_n'(1).$$

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f^2(x,y)+z \quad \text{avec} \quad z=x-1,$$

on peut obtenir les dérivées suivantes sous la forme

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}=\mathrm{P}_n(f),$$

où P_n est un polynôme, l'expression $z = x - 1$ étant considérée comme une constante. On construit les polynômes P_n ainsi : d'après l'équation différentielle vérifiée par f,

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2+z,$$

et en dérivant par rapport à y la relation au rang n,

$$\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})=\frac{1}{n+1}\mathrm{P}_n'(\mathrm{X})\left(\mathrm{X}^2+z\right).$$

Et

$$g_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,0)=\mathrm{P}_n(1),$$

puisque $f(x, 0) = 1$. On trouve les premières valeurs des polynômes P_n :

$$\mathrm{P}_2(\mathrm{X})=\mathrm{X}^3+z\,\mathrm{X},$$

$$\mathrm{P}_3(\mathrm{X})=\mathrm{X}^4+\frac{4}{3}z\,\mathrm{X}^2+\frac{1}{3}z^2,$$

$$\mathrm{P}_4(\mathrm{X})=\mathrm{X}^5+\frac{5}{3}z\,\mathrm{X}^3+\frac{2}{3}z^2\,\mathrm{X},$$

$$P_5(X) = X^6 + 2zX^4 + \frac{17}{15}z^2X^2 + \frac{2}{15}z^3,$$

$$P_6(X) = X^7 + \frac{7}{3}zX^5 + \frac{77}{45}z^2X^3 + \frac{17}{45}z^3X,$$

$$P_7(X) = X^8 + \frac{8}{3}zX^6 + \frac{12}{5}z^2X^4 + \frac{248}{315}z^3X^2 + \frac{17}{315}z^4,$$

$$P_8(X) = X^9 + 3zX^7 + \frac{16}{5}z^2X^5 + \frac{88}{63}z^3X^3 + \frac{62}{315}z^4X,$$

$$P_9(X) = X^{10} + \frac{10}{3}zX^8 + \frac{37}{9}z^2X^6 + \frac{424}{189}z^3X^4 + \frac{1382}{2835}z^4X^2 + \frac{62}{2835}z^5.$$

Dans l'expression $g_n(x) = P_n(1)$, on trouve l'espérance $g_n'(1)$ comme coefficient devant $z = x - 1$. Ainsi, les premières valeurs sont

n	3	4	5	6	7	8	9
E(n)	4/3	5/3	2	7/3	8/3	3	10/3

On conjecture donc que

$$E(X_n) = \frac{n+1}{3}.$$

Cette conjecture se démontre par récurrence : $E(X_n) = g_n'(1)$ est le coefficient devant z, qui apparaît dans le coefficient en X^{n-1} de $P_n(X)$. Faisons l'hypothèse de récurrence

$$P_n(X) = X^{n+1} + \frac{n+1}{3}zX^{n-1} + \cdots$$

Alors

$$P_n'(X) = (n+1)X^n + (n-1)\frac{n+1}{3}zX^{n-2} + \cdots$$

et donc

$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{n+1}(X^2+z)P_n'(X) = (X^2+z)\left(X^n + \frac{n-1}{3}zX^{n-2} + \cdots\right)$$

soit

$$P_{n+1}(X) = X^{n+2} + \left(1 + \frac{n-1}{3}\right)zX^n + \cdots = X^{n+2} + \frac{n+2}{3}zX^{n+1} + \cdots,$$

ce qui termine la récurrence.