Solutions de Michel Lafond (Dijon) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

L'inégalité de gauche est classique. Elle resulte de la convexité de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}$. L'inégalité de Jensen garantit alors, avec les notations de l'énoncé, l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i),$$

soit encore

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}.$$

En prenant l'inverse, on obtient bien

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

L'inégalité de droite est franchement plus délicate. Voici une premiere solution, due à **Pierre Renfer**.

Pour $n=1$, l'inégalité est évidente. Le cas $n=2$ est egalement évident si $x_1 = x_2$. Pour $x_1 \neq x_2$ fixés, on considère la fonction

$$F:(p_1,p_2) \mapsto p_1x_1 + p_2x_2 - \frac{1}{\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}} = p_1x_1 + p_2x_2 - \frac{x_1x_2}{p_1x_2+p_2x_1}.$$

Cette fonction F atteint son maximum M sur l'ensemble compact

$$\mathrm{C} = \left\{(p_1,p_2) \in [0,1]^2 \mid p_1 + p_2 = 1\right\}.$$

Comme F s'annule sur le bord du compact C, le maximum est atteint en un point intérieur. **Pierre Renfer** utilise alors les multiplicateurs de Lagrange. On pose

$$\mathrm{G}(p_1,p_2,\lambda) = \mathrm{F}(p_1,p_2) + \lambda(p_1+p_2-1)$$

et l'on cherche à annuler son gradient

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_1} = x_1 + \frac{x_1x_2^2}{(p_1x_2+p_2x_1)^2} + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_2} = x_2 + \frac{x_1^2x_2}{(p_1x_2+p_2x_1)^2} + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \lambda} = p_1 + p_2 - 1$$

Puisque $x_1 \neq x_2$, la différence des deux premières équations donne

$$p_1x_2 + p_2x_1 = \sqrt{x_1x_2}.$$

Avec la dernière équation, on en deduit que

$$p_1 = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}.$$

Puisqu'il y a un seul tel point, F y présente bien un maximum, à savoir

$$\mathrm{M} = \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}, \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right).$$

Après calcul, on trouve

$$\mathrm{M} = \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2.$$

Or, par hypothèse,

$$\mathrm{S} \leq \sqrt{x_1} \leq \mathrm{S}+t \quad \text{et} \quad \mathrm{S} \leq \sqrt{x_2} \leq \mathrm{S}+t.$$

donc

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right| \leq t.$$

Ainsi,

$$\mathrm{M} \leq t^2,$$

ce qui établit la relation au rang $n = 2$.

On suppose la relation établie au rang n. Si au rang $n + 1$, deux nombres parmi $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont égaux, par exemple x_n et x_{n+1}, alors la moyenne des nombres $x_1, \ldots, x_{n+1}$ affectés des coefficients $p_1, \ldots, p_{n+1}$ est la moyenne des nombres $x_1, \ldots, x_n$ affectés des coefficients $p_1, \ldots, p_{n-1}, (p_n + p_{n+1})$. L'inégalité est alors vraie par hypothèse de récurrence.

Si les nombres $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont tous distincts, on considère la fonction

$$\mathrm{F}:(p_1,\ldots,p_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i - \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{p_i}{x_i}}.$$

Elle atteint un maximum sur l'espace compact

$$\mathrm{C}=\left\{(p_1,\ldots,p_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} \mid p_1+\ldots+p_{n+1}=1\right\}.$$

Si le maximum est atteint en un point intérieur du compact, on peut obtenir ce point par la méthode de Lagrange. On pose

$$\mathrm{G}(p_1,\ldots,p_{n+1},\lambda)=\mathrm{F}(p_1,\ldots,p_{n+1})+\lambda(p_1+\ldots+p_{n+1}-1).$$

On veut annuler le gradient :

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_i}=x_i+\frac{1}{x_i}\frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{p_k}{x_k}\right)^2}+\lambda \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \lambda}=p_1+\ldots+p_{n+1}-1.$$

La différence $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_1}-\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_2}$ donne

$$x_1 x_2\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{p_k}{x_k}\right)^2=1$$

tandis que la différence $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_1}-\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_3}$ donne

$$x_1 x_3\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{p_k}{x_k}\right)^2=1.$$

Ainsi, $x_2 = x_3$, ce qui est exclu. La fonction F atteint donc son maximum en un point du bord du compact C, mais en un tel point, l'un des coefficients est nul, disons p_{n+1}. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Voici maintenant la solution proposée par **Michel Lafond** pour la seconde inégalité. On pose

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}}$$

L'entier n est le nombre de modalités de la variable aléatoire $\mathrm{X} = \{(x_i, p_i)\}$. On peut toujours supposer

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Puisque $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x_1}\right| \leq t$, il suffit de montrer

$$\mathrm{A} \leq \mathrm{H} + \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_1}\right)^2.$$

On peut tout diviser par $x_1 > 0$ et se contenter du cas

$$0 < x_1 = 1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{A} \leq \mathrm{H} + \left(\sqrt{x_n} - 1\right)^2$$

Le cas $n = 1$ est évident puisque A = H. Examinons le cas $n = 2$ en posant $x_2 = y$. Si 1 et y sont pondérés par a et $1 - a$ (avec $0 \leq a \leq 1$), on a

$$\mathrm{A} = a + (1-a)y \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \frac{y}{ay + 1 - a}.$$

Un calcul donne

$$\mathrm{A} - \mathrm{H} = \frac{a(1-a)(y-1)^2}{ay + 1 - a}.$$

Donc

$$\mathrm{A} - \mathrm{H} - \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 \left(\frac{a(1-a)\left(\sqrt{y}+1\right)^2}{ay + 1 - a} - 1\right).$$

Donc $\mathrm{A} - \mathrm{H} - \left(\sqrt{y} - 1\right)^2$ est du signe de $a(1-a)\left(\sqrt{y}+1\right)^2 - ay + a - 1$ Mais

$$a(1-a)\left(\sqrt{y}+1\right)^2 - ay + a - 1 = -\left(a\sqrt{y} + a - 1\right)^2 \leq 0,$$

ce qui clôt l'étude du cas $n = 2$.

Passons au cas $n = 3$, en posant $x_3 = y$. Il s'agit de montrer que si $1, x, y$ (avec $1 \leq x \leq y$) sont pondérés par a, p, b (de somme 1), alors

$$\mathrm{H} - A + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 \leq 0.$$

On fixe a, b, p, y et l'on fait varier x dans l'intervalle $[1, y]$. Ainsi,

$$\mathrm{H} - A + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = f(x) = \frac{x}{\theta x + p} - \sigma - px + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2,$$

avec

$$\theta = a + \frac{b}{y} \quad \text{et} \quad \sigma = a + by.$$

Or

$$f'(x) = \frac{p}{(\theta x + p)^2} - p,$$

donc f' est une fonction décroissante sur $[1, y]$. Ainsi, f est concave. Pour montrer que f est positive sur $[1, y]$, il suffit de montrer qu'elle l'est en $x = 1$ et en $x = y$. Mais dans les deux cas, la variable $\mathrm{X} = \{(1,a);(x,p);(y,b)\}$ n'a que deux modalités et dans le cas $n = 2$, la propriété a été établie.

Enfin, le cas où X a n modalités se ramène au cas de $n - 1$ modalités, en fixant toutes les modalités sauf une que l'on fait varier, ce qui termine la démonstration.