Solution de Richard Beczkowsky (Châlon-sur-Saône)

Soit I le point commun aux perpendiculaires menées de A, B et C aux côtés du triangle A′B′C′. Les perpendiculaires menées de B′ et C′ aux côtés du triangle ABC se coupent en I′. Ces orthogonalités se traduisent à l'aide de produits scalaires par :

$$\left(\overrightarrow{I'A}-\overrightarrow{I'I}\right)\cdot\overrightarrow{B'C'}=0\ ;\ \left(\overrightarrow{I'B}-\overrightarrow{I'I}\right)\cdot\overrightarrow{C'A'}=0\ ;\ \left(\overrightarrow{I'C}-\overrightarrow{I'I}\right)\cdot\overrightarrow{A'B'}=0\ ;$$

$$\overrightarrow{I'B'}\cdot\left(\overrightarrow{I'A}-\overrightarrow{I'C}\right)=0\ ;\ \overrightarrow{I'C'}\cdot\left(\overrightarrow{I'B}-\overrightarrow{I'A}\right)=0.$$

Après addition de ces relations, il vient :

$$\overrightarrow{I'A}\cdot\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{I'B'}-\overrightarrow{I'C'}\right)+\overrightarrow{I'B}\cdot\left(\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{I'C'}\right)$$
$$+\overrightarrow{I'C}\cdot\left(\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{I'B'}\right)-\overrightarrow{I'I}\cdot\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{A'B'}\right)=0,$$

$$\overrightarrow{I'A}\cdot\vec{0}+\overrightarrow{I'B}\cdot\overrightarrow{I'A'}+\overrightarrow{I'C}\cdot\overrightarrow{A'I'}-\overrightarrow{I'I}\cdot\vec{0}=0,$$

soit

$$\overrightarrow{I'A'}\cdot\overrightarrow{CB}=0$$

qui prouve que (I′A′) est perpendiculaire à (BC).