Solution de Pierre Renfer (Ostwald)

La fonction scalaire de Leibniz $M \mapsto MA'^2 - MB'^2$ a pour lignes de niveau les perpendiculaires à la droite (A′B′).
Donc si les perpendiculaires menées des points A, B et C respectivement sur les droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) se coupent en un point M, alors :

$$\begin{cases} MA'^2 - MB'^2 = CA'^2 - CB'^2 \\ MB'^2 - MC'^2 = AB'^2 - AC'^2 \\ MC'^2 - MA'^2 = BC'^2 - BA'^2 \end{cases} \qquad (S)$$

En additionnant, on obtient une condition nécessaire pour le concours des trois perpendiculaires :

$$AB'^2 + BC'^2 + CA'^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'A^2 \qquad (C)$$

Cette condition est aussi suffisante, car si les deux premières perpendiculaires se coupent en M, les deux premières équations de (S) sont satisfaites et la condition (C) assure que la troisième l'est aussi et que le point M appartient donc à la troisième perpendiculaire.
Les deux triangles ABC et A′B′C′ sont interchangeables dans la condition (C).
Donc si les perpendiculaires menées des points A, B et C respectivement sur les droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) sont concourantes, il en est de même des perpendiculaires menées des points A′, B′ et C′ respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).