Solution de l'auteur

Cherchons l'aire maximale d'un triangle ABC pour lequel il existe un point P tel que PA = 25 m, PB = 33 m et PC = 39 m.
Ce maximum existe puisque

$$AB \leq AP + PB = 58,\ AC \leq AP + PC = 64,\ BC \leq BP + PC = 72.$$

Soit ABC un tel triangle « maximal », et supposons que P ne soit pas l'orthocentre de ABC. Dans ce cas, P n'est pas sur au moins une des hauteurs, disons celle issue de A (figure 1).

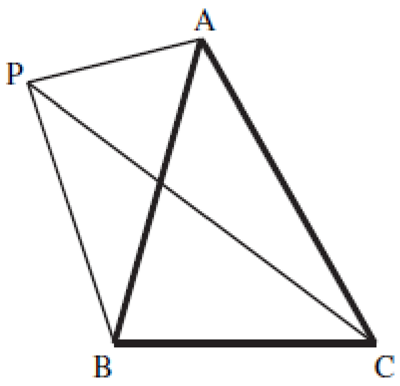

Figure 1

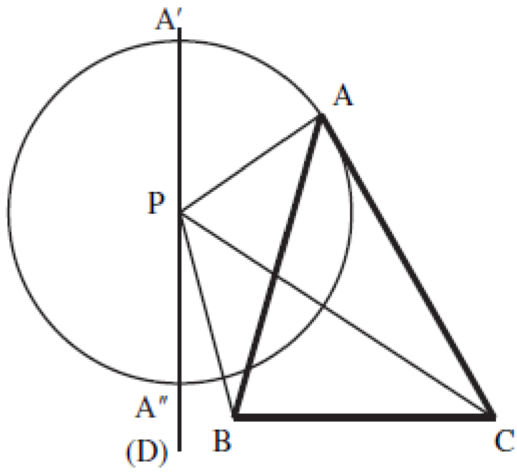

Figure 2

Mais alors, si (D) est la perpendiculaire à (BC) passant par P, A n'appartient pas à (D), donc le cercle de centre P et de rayon PA coupe (D) en deux points A′ et A″ distincts de A (figure 2).

L'un des triangles A′BC et A″BC a une aire supérieure à celle de ABC avec les mêmes distances PA = PA′ = PA″, PB, PC. D'où une contradiction.
On suppose donc que P est l'orthocentre de ABC.

Si P est à l'extérieur de ABC, (figure 3), alors le triangle A′BC, avec A′ symétrique de A par rapport à P, aurait une aire supérieure à celle de ABC avec les mêmes distances PA = PA′, PB, PC. D'où la même contradiction que précédemment.
On peut donc supposer que P orthocentre de ABC est à l'intérieur de ABC (figure 4).

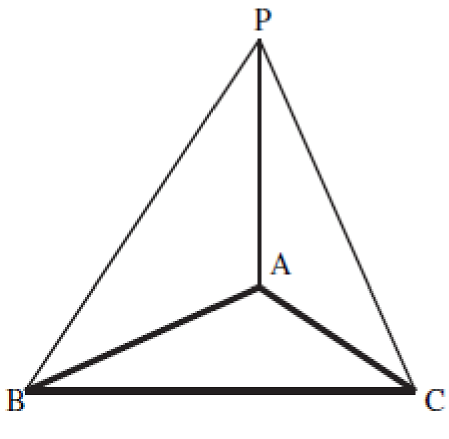

Figure 3

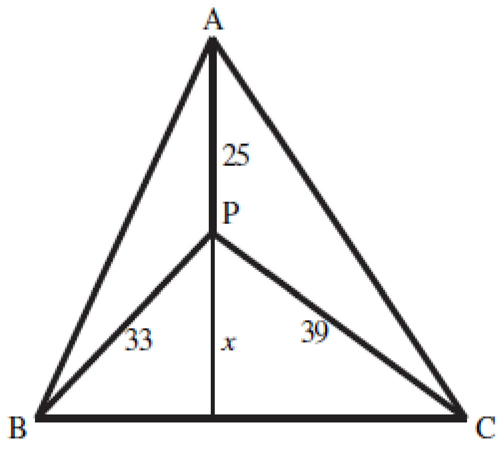

Figure 4

Posons PH = x où H est le pied de la hauteur issue de A. On a :

$$\mathrm{BH}=\sqrt{33^2-x^2}\ ,\ \mathrm{CH}=\sqrt{39^2-x^2}\ .$$

L'aire de ABC est égale à

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{33^2-x^2}+\sqrt{39^2-x^2}\right)(x+25).$$

On cherche le maximum de $f(x)$; on peut se contenter du domaine]0, 33[, puisque x < PB = 33.

On trouve

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{33^2-x^2}+\sqrt{39^2-x^2}\right)\left(1-\frac{x(x+25)}{\sqrt{33^2-x^2}\sqrt{39^2-x^2}}\right).$$

En utilisant la quantité conjuguée, on trouve que $f'(x)$ est du signe

$$\left(33^2-x^2\right)\left(39^2-x^2\right)-\left[x(x+25)\right]^2=-50x^3-3\,235x^2+1\,656\,369.$$

Ce polynôme se factorise en

$$(-5x+99)\left(10x^2+845x+16\,731\right).$$

Le second facteur a ses deux racines négatives. Donc, sur]0, 33[, $f'(x)$ est du signe de $-5x + 99$.

Le maximum de l'aire est atteint pour $x=\frac{99}{5}=19,8$ avec $f'\left(\frac{99}{5}\right)=1\,344$.

Puisque par hypothèse aire (ABC) = 1 344, c'est qu'on est nécessairement dans le cas de la figure 4 pour laquelle on calcule :

$$\mathrm{BH}^2=33^2-x^2=696,96,$$

$$\mathrm{CH}^2=39^2-x^2=1128,96,$$

d'où

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BH}^2+(x+25)^2=2\,704,$$

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{CH}^2+(x+25)^2=3136,$$

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BH}+\mathrm{HC}=26,4+33,6.$$

Les côtés de ABC mesurent donc :
AB = 52 m, AC = 56 m et BC = 60 m.

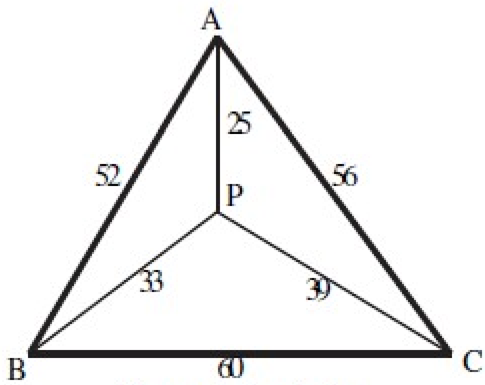

Figure 5 : le résultat