Solution de Alain Corre (Moulins)

Partie a)

Soit

$$N = 1000a + 100b + 10c + d$$

un entier, a, b, c et d étant des chiffres compris entre 0 et 9, a étant non nul. Si on ajoute 1 à chaque chiffre, on obtient

$$M = N + 1\,111.$$

Si N et M sont deux carrés parfaits k^2 et k'^2, alors on a :

$$k'^2 - k^2 = 1\,111 = 11 \times 101 = 1 \times 1\,111.$$

Premier cas : $\begin{cases} k' - k = 1 \\ k' + k = 1111 \end{cases}$ a pour solution $k' = 556$ et $k = 555$.

$k = 555$ est impossible puisque $555^2 = 308\,025$ possède plus de quatre chiffres.

Deuxième cas : $\begin{cases} k' - k = 11 \\ k' + k = 101 \end{cases}$ a pour solution $k' = 56$ et $k = 45$.

$k^2 = 2\,025$ et $k'^2 = 3\,136$. Il existe donc une solution : N = 2 025.

Partie b)

Soit N un entier de quatre chiffres, sachant que les deux chiffres de gauche sont égaux ainsi que les deux chiffres de droite. En appelant a et b les chiffres de gauche et de droite, on a : $N = 1\,100\,a + 11\,b = 11\,(100\,a + b)$.

Pour que N soit un carré parfait, il est nécessaire que $100\,a + b$ soit de la forme $11\,k^2$.

Comme $\dfrac{100a+b}{11}$ est un carré parfait, en remarquant que ce nombre doit être compris entre 9 et 90, les seuls carrés qui conviennent sont : 16, 25, 36, 49, 64 et 81. D'où $100\,a + b$ doit être l'un des nombres suivants : 176, 275, 393, 539, 704, 891.

Le seul à être de la forme cherchée est 704, d'où $N = 11 \times 704 = 7\,744$ qui est la solution cherchée : **N = 7 744**.