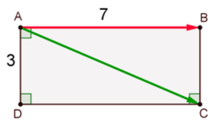
Produit scalaire – Série 1 – Correction

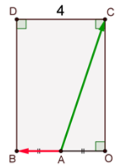
CONSIGNE Pour chaque figure, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en choisissant l'expression du produit scalaire qui vous semble la mieux adaptée.

N°0



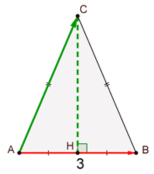
ABCD est un rectangle.
B est le projeté orthogonal de C sur (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \mathbf{49}$

N°1



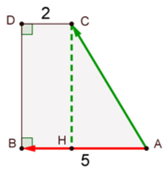
O est le projeté orthogonal de C sur (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB^2 = \mathbf{-4}$

N°2



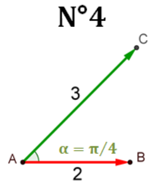
H le projeté de C sur (AB) est le milieu de [AB].
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 3 \times 1{,}5 = \mathbf{4{,}5}$

N°3



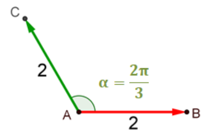
H est le projeté de C sur (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 5 \times 3 = \mathbf{15}$

N°4



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$

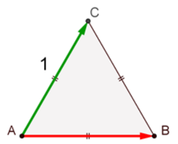
N°5



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \frac{-1}{2}$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \mathbf{-2}$

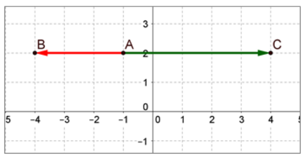
N°6



Le triangle ABC est équilatéral : $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

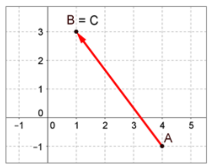
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

N°7



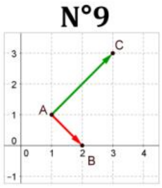
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\pi) = 5 \times 3 \times (-1)$
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \mathbf{-15}$

N°8



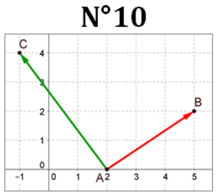
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3\,;4)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = (-3)^2 + 4^2 = \mathbf{25}$

N°9



$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}$ $(2\,;2)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + (-1) \times 2 = \mathbf{0}$
Les deux vecteurs sont orthogonaux.

N°10



$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}$ $(-3\,;4)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 2 \times 4 = \mathbf{-1}$

FIN

Produit scalaire − Série 2 – Correction

CONSIGNE Vrai ou faux ? Prévoir une justification mentale de vos réponses.

Le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ est orthonormé.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

N°1 FAUX

Si $\vec{u}\,(-4\,;3)$ alors $\|\vec{u}\| = 7$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

N°2 VRAI

Si $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ sont colinéaires et de sens contraires alors $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}$.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos(\pi) = -\mathbf{OA}\times\mathbf{OB}$

N°3 VRAI

Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;3)$ est normal à la droite d'équation $x+3y-5=0$.

Soit $\mathbf{1}x + \mathbf{3}y - 5 = 0$

N°4 VRAI

Si $\vec{u}\left(3\,;\frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{2}\,;-2\right)$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{5}{6}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times\frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{3} = \frac{3}{2}-\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{5}{6}}$

N°5 FAUX

La droite d'équation $y = 5x+1$ admet le vecteur $\vec{u}\,(\cancel{5\,;1})$ comme vecteur directeur.

$5x - y + 1 = 0$ donc $\vec{\boldsymbol{u}}\,(\mathbf{1};\mathbf{5})$ par exemple.

N°6 FAUX

La droite d'équation $y = 5x+1$ admet le vecteur $\vec{n}\,(\cancel{5\,;1})$ comme vecteur normal.

$5x - y + 1 = 0$ donc $\vec{\boldsymbol{n}}\,(\mathbf{5}\,;-\mathbf{1})$ par exemple.

N°7 FAUX

Il n'existe pas de réel x tel que $\vec{u}\,(-4\,;2)$ et $\vec{v}\,(3\,;x)$ soient orthogonaux.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -12+2x = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 6}$

N°8 VRAI

Une équation de la droite d passant par le point $\mathrm{A}\,(1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(-3\,;2)$ est $-3x+2y+1=0$.

Et $-3\times1+2\times1+1=0$. Donc $\mathbf{A}\in\boldsymbol{d}$.

N°9 VRAI

Les points A, B et C sont tels que $\mathrm{AB}=8$, $\mathrm{AC}=3$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -12$.

Une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est : $\frac{2\pi}{3}$

$\cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}} = \frac{-12}{24} = -\frac{1}{2}$.

Donc $\widehat{\mathbf{BAC}} = \frac{2\pi}{3}$.

N°10 FAUX

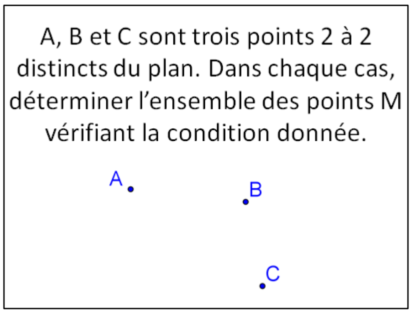
Il existe des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 30$.

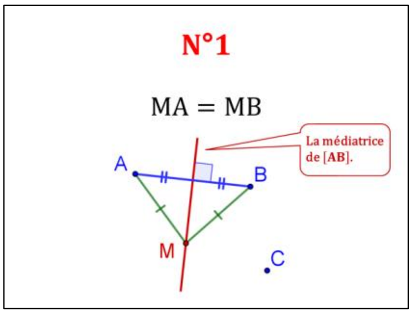
Sinon $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{30}{21} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{7}} > \mathbf{1}$!

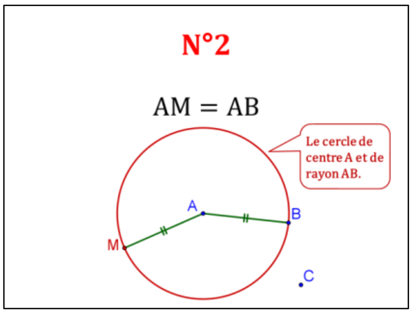
FIN

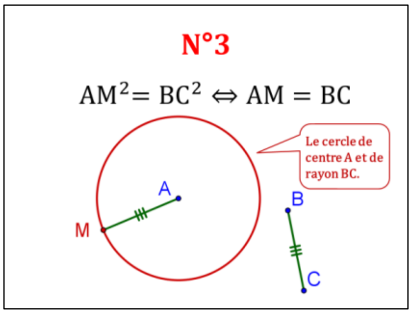
Produit scalaire − Série 3 – Correction

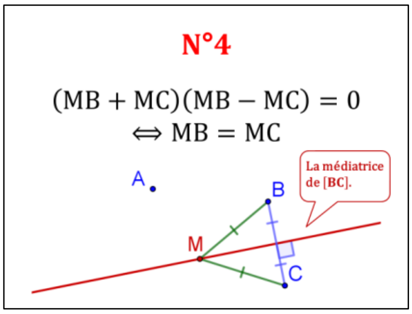
CONSIGNE A, B et C sont trois points 2 à 2 distincts du plan. Dans chaque cas, déterminer l’ensemble des points M vérifiant la condition donnée.

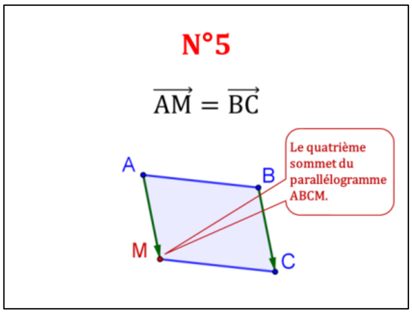


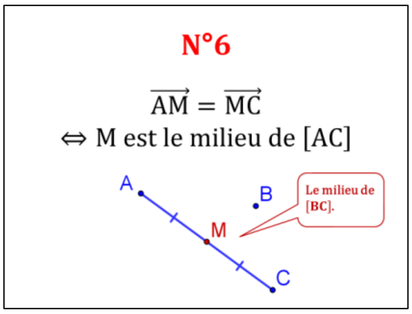


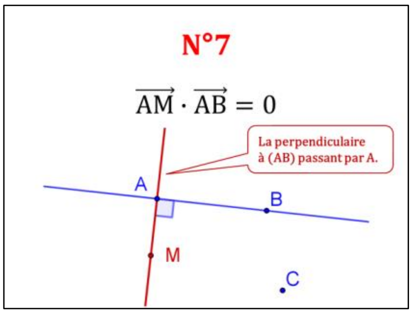


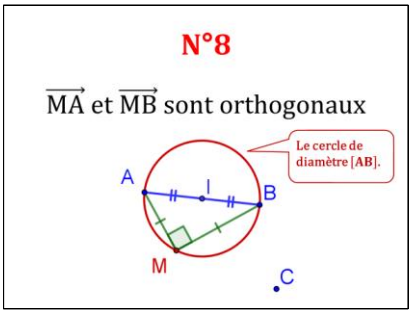


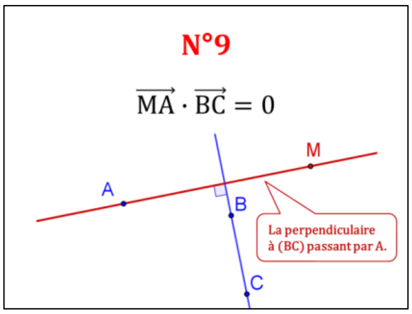


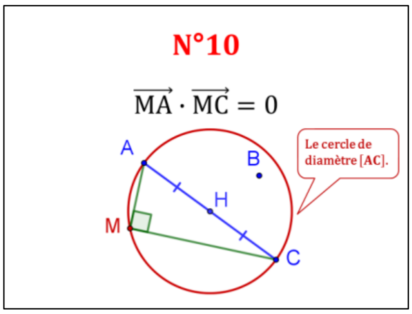


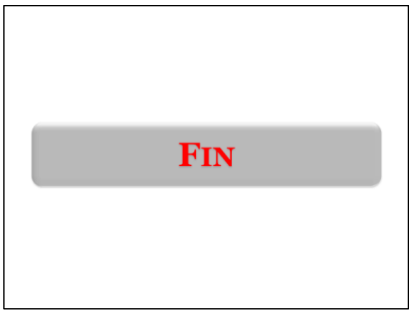












Produit scalaire − Série 4 – Correction

CONSIGNE Le plan est muni d'un repère orthonormé. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

ÉQUATIONS DE DROITES ET DE CERCLES

N°1

$3 \times 1 - 2 \times 1 - 1 = 0$

d est la droite qui passe par $A(1;1)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(3;-2)$.
Une équation cartésienne de d est :

- ➡ a) $3x - 2y - 1 = 0$
- b) $-2x + 3y = 0$
- c) $3x - 2y + 1 = 0$

N°2

$3 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 5 = 0$

d est la droite dont une équation cartésienne est : $x + \sqrt{2}y - 5 = 0$.
Un point M et un vecteur normal sont :

- a) $M(5;0)$ et $\vec{n}(-\sqrt{2};1)$
- ➡ b) $M(3;\sqrt{2})$ et $\vec{n}(1;\sqrt{2})$
- c) $M(-\sqrt{2};5)$ et $\vec{n}(1;\sqrt{2})$

N°3

$\vec{n_2}(1;2)$ et $\vec{n_3}(-1;-2)$ donc $\vec{n_3} = -\vec{n_2}$

d_1, d_2 et d_3 ont pour équations :
$2x - y - 1 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $-x - 2y = 0$.
Deux sont parallèles. Lesquelles ?

- a) d_1 et d_2
- ➡ b) d_2 et d_3
- c) d_1 et d_3

N°4

$\vec{n_1}(2;-1)$ et $\vec{n_2}(1;2)$ donc $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

d_1, d_2 et d_3 ont pour équations :
$2x - y - 1 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $-x + 2y = 0$.
Deux sont perpendiculaires. Lesquelles ?

- ➡ a) d_1 et d_2
- b) d_2 et d_3
- c) d_1 et d_3

N°5

Vecteur normal : $\overrightarrow{AB}(6;-4)$
Milieu de [AB] : $I(0;0)$

On donne les points $A(-3;2)$ et $B(3;-2)$.
Une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] est :

- a) $-2x + 3y = 0$
- ➡ b) $3x - 2y = 0$
- c) $6x - 4y + 3 = 0$

N°6

Abscisse : $\frac{2+3}{2} = 2,5$
Ordonnée : $\frac{-5+1}{2} = -2$

Le cercle Γ de diamètre [EF] avec $E(2;-5)$ et $F(3;1)$ a pour centre I de coordonnées :

- a) $I\left(\frac{5}{2};2\right)$
- b) $I(-0,5;-3)$
- ➡ c) $I(2,5;-2)$

N°7

Le cercle Γ de centre $A(1;1)$ et passant par le point $B(5;0)$ a pour rayon :

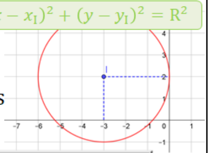
Rayon : $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$

- a) 17
- ➡ b) $\sqrt{17}$
- c) $\sqrt{15}$

N°8

$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2$

Le cercle de centre $I(-3;2)$, tangent à l'axe des ordonnées a pour équation :



- a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$
- b) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3$
- ➡ c) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$

N°9

Le cercle Γ a pour équation :
$(x - 1,9)^2 + (y - 2,75)^2 = 2$ r^2
Son centre Ω et son rayon r vérifient :

- a) $\Omega(1,9;2,75)$ et $r = 2$
- b) $\Omega(-1,9;-2,75)$ et $r = 2$
- ➡ c) $\Omega(1,9;2,75)$ et $r = \sqrt{2}$

N°10

L'algorithme affiche si un point $M(x;y)$ appartient à un disque de centre Ω et de rayon r.

```
d ← (x − 1)² + (y + 2)²
Si d ≤ 5 alors :
        Afficher « OUI »
Sinon :
        Afficher « NON »
Fin Si
```

r^2

Ω et r vérifient :

- a) $\Omega(-1;2)$ et $r = 5$
- b) $\Omega(1;-2)$ et $r = 5$
- ➡ c) $\Omega(1;-2)$ et $r = \sqrt{5}$

FIN

Produit scalaire − Série 5 – Correction

CONSIGNE A, B et C sont trois points distincts. Déterminer la longueur ou une mesure de l'angle, demandée. Les angles donnés ou à déterminer sont en radians.

CALCULS DE LONGUEURS ET D'ANGLES

N°1

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens. On sait que :
- $AB = 3$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$

$AC = ?$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC = 12$
Donc $AC = 4$

N°2

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires. On sait que :
- $AB = 3$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -21$

$AC = ?$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC = -21$
Donc $AC = 7$

N°3

- $AB = 3$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$
- $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

$AC = ?$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
Donc $3 \times AC \times \frac{1}{2} = 9$
Donc $AC = 6$

N°4

- $AB = 3$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$
- $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$

$AC = ?$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
Donc $3 \times AC \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -3$
Donc $AC = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$

N°5

- $AB = 3$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- $AC = 4$

$BC = ?$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux
Donc ABC est rectangle en A
Donc $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 16}$
Donc $BC = 5$

N°6

- $AB = 4$
- $AC = 2$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$

$\widehat{BAC} = ?$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$
Donc $\widehat{BAC} = 0$

N°7

- $AB = 4$
- $AC = 2\sqrt{3}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8\sqrt{3}$

$\widehat{BAC} = ?$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$
Donc $\widehat{BAC} = \pi$

N°8

- $AB = 3$
- $AC = 2$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{3}$

$\widehat{BAC} = ?$

$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$

N°9

- $AB = 5$
- $AC = 6$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -15$

$\widehat{BAC} = ?$

$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = -\frac{1}{2}$

Donc $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

N°10

$\widehat{BAC} = ?$

Dans un repère orthonormé,
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 = 0$

Donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$

FIN

Produit scalaire – Série 6

CONSIGNE Répondre aux questions posées en utilisant les formules rappelées.

PROPRIÉTÉS ET FORMULES

N°1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v} = 12$$

N°2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{3}{4}\vec{v}\right) = \frac{3}{4}\vec{u}\cdot\vec{v} = 9$$

N°3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

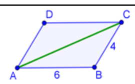
$$\frac{1}{3}\vec{u}\cdot(-2\vec{v}) = \frac{-2}{3}\vec{u}\cdot\vec{v} = -8$$

N°4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = 2\vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} = 6$$

N°5



$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

ABCD est un parallélogramme.

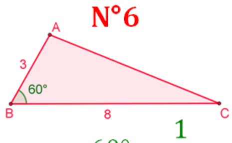
On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$

$AC^2 = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2$
$= AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
$= 36 + 16 + 12 = 64$

Donc AC = 8

N°6

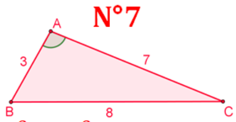


$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$AC^2 = 8^2 + 3^2 - 2\times 8\times 3\times\frac{1}{2} = 49$$

AC = 7

N°7



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\hat{A}$

$8^2 = 3^2 + 7^2 - 2\times 3\times 7\times\cos\hat{A}$

$$\cos\hat{A} = \frac{9+49-64}{42} < 0$$

$\hat{A}$ est obtus

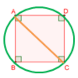
N°8

Une seule réponse est exacte.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = 0$ est :

a) Réduit aux points E et F
b) Le cercle de centre E passant par F
c) Le cercle de diamètre [EF]

N°9



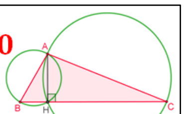
Une seule réponse est exacte.

ABCD est un carré.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$ est :

a) Le cercle circonscrit au carré ABCD
b) La perpendiculaire en A à (AC)
c) Réduit aux points A et C

N°10



Une seule réponse est exacte.

ABC est un triangle

C_1 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

C_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$

a) C_1 et C_2 n'ont aucun point commun
b) C_1 et C_2 ont un seul point commun
c) Le point H, pied de la hauteur issue de A est commun à C_1 et C_2

FIN