PRODUIT SCALAIRE
SÉRIE 6

Activités mentales et automatismes en classe de première

IREM de Clermont-Ferrand

PROPRIÉTÉS ET FORMULES

Bilinéarité et symétrie

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

Calculer chacun des produits scalaires suivants.

N°1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

N°1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = ?$$

N°2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

N°2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\vec{\boldsymbol{v}}\right) = ?$$

N°3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

N°3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\frac{1}{3}\vec{u} \cdot \left(-2\vec{v}\right) = ?$$

N°4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

N°4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (2\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}) = ?$$

Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

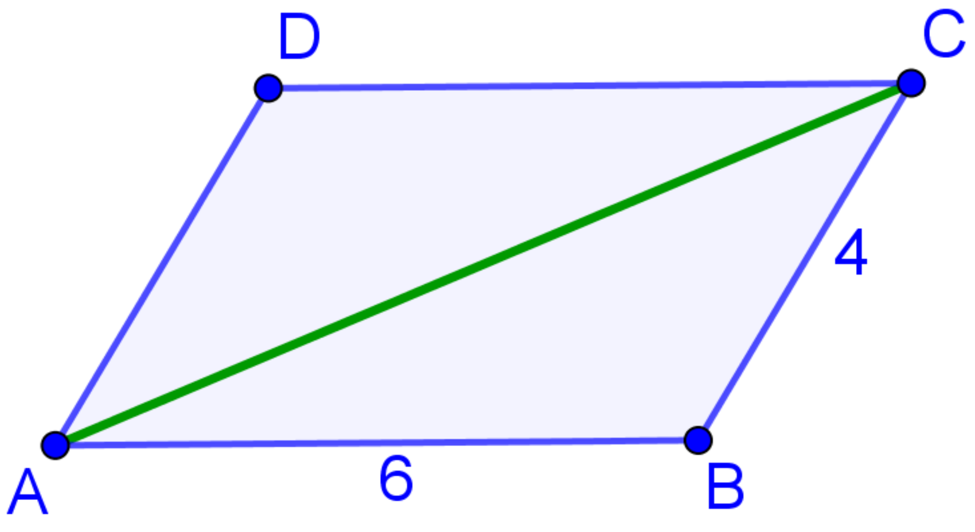
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

N°5

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.

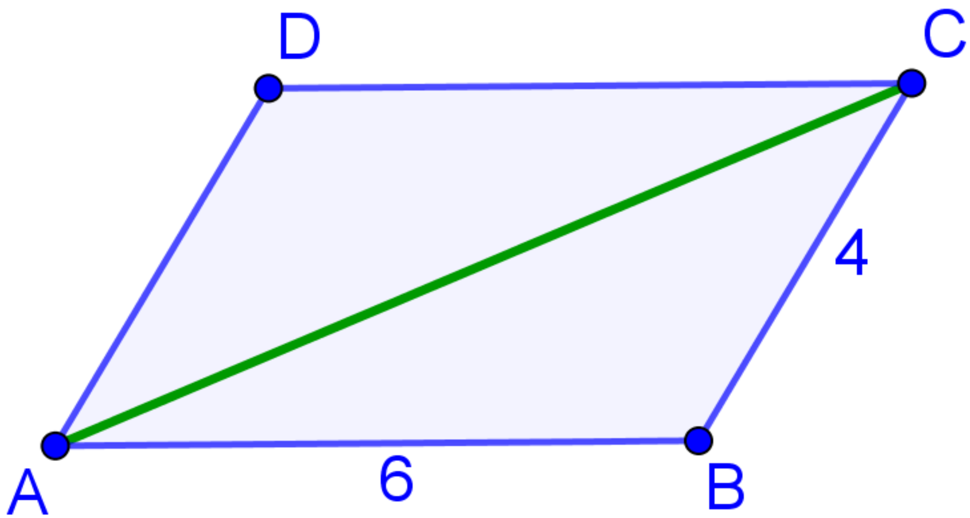


N°5

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.



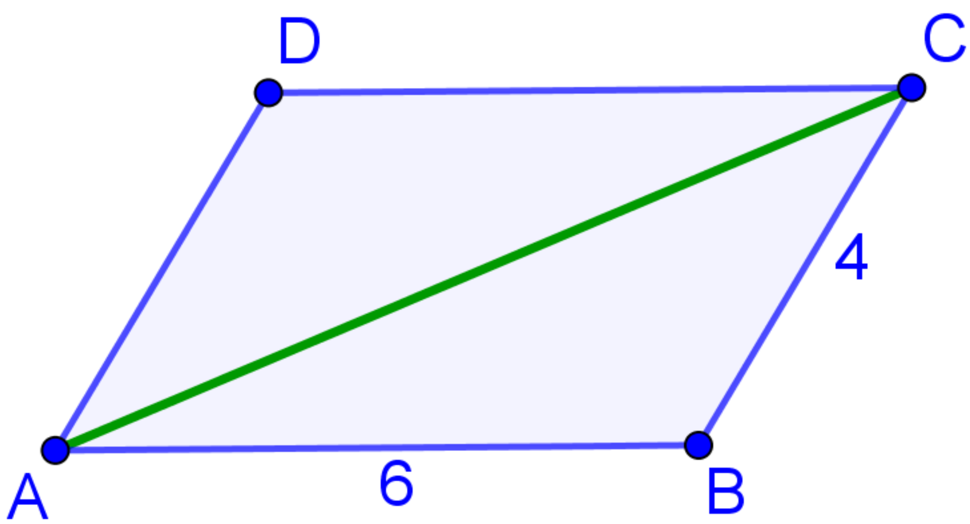
$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}} = ?$$

N°5

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 6$.



$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{BC}} = ?$$

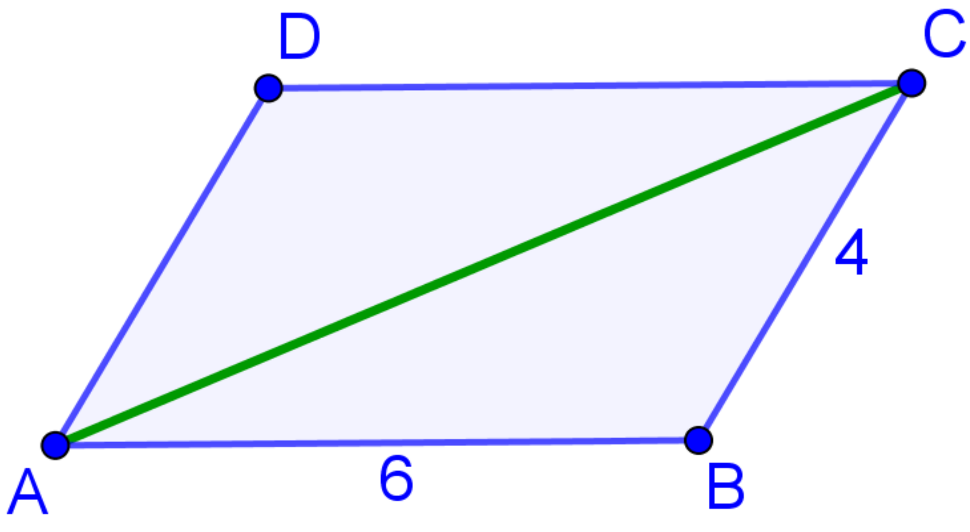
$$\mathbf{AC}^2 = ?$$

N°5

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 6$.



$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{BC}} = ?$

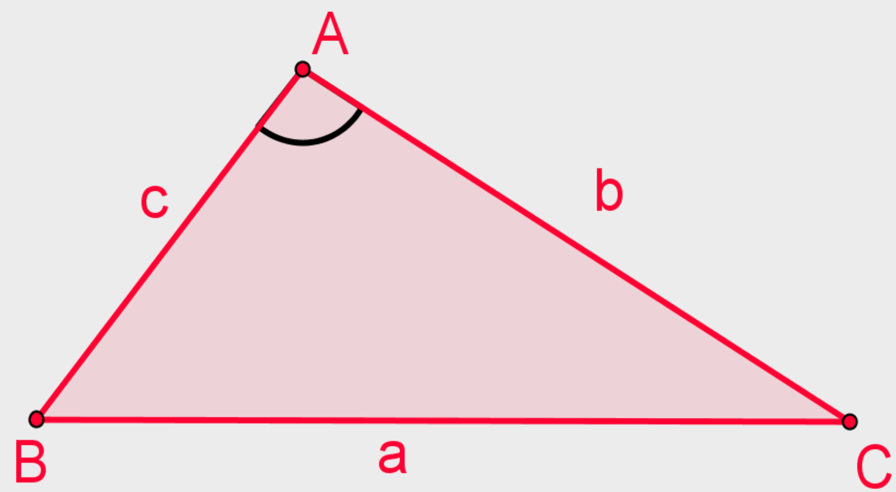
$\mathbf{AC^2} = ?$

$\mathbf{AC} = ?$

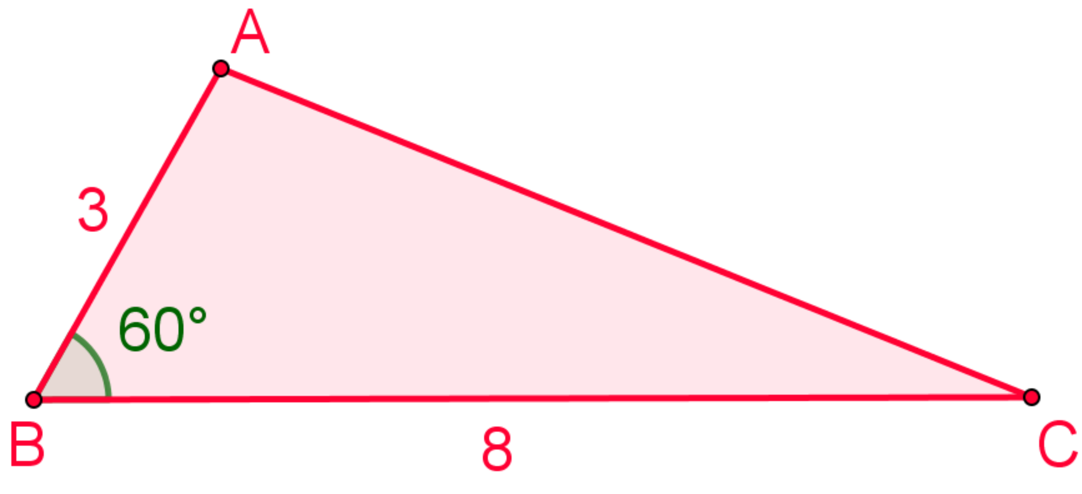
Formule d'Al -Kashi

(mathématicien et astronome né en Iran au XIVème siècle)

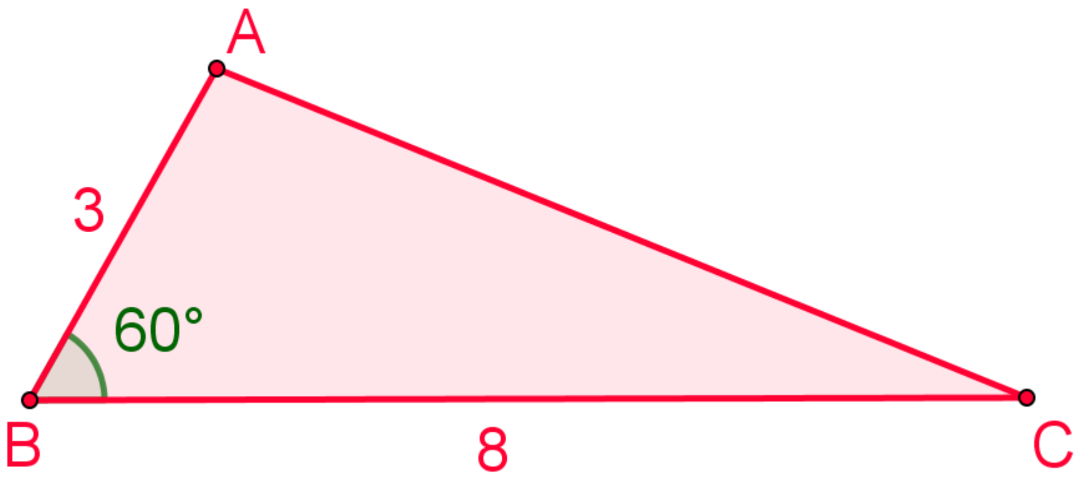
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$



N°6

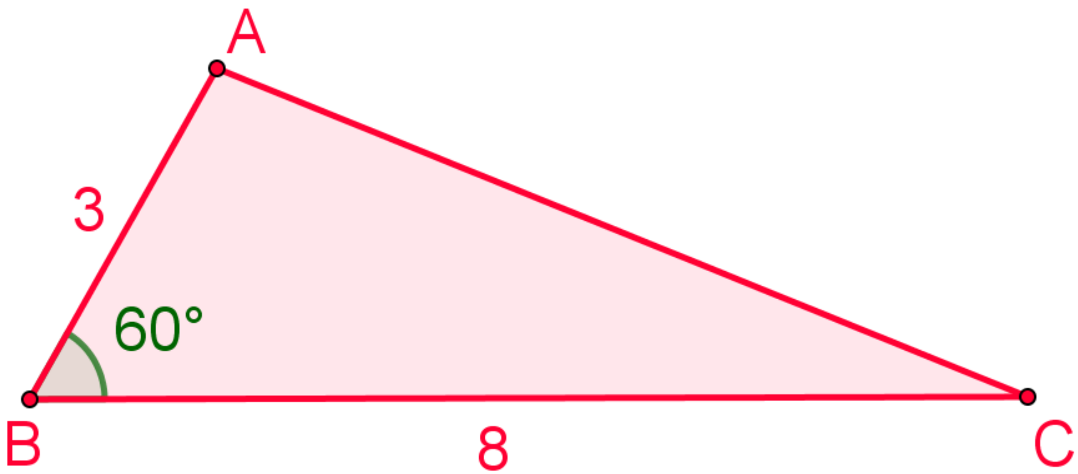


N°6



$$\cos 60° = ?$$

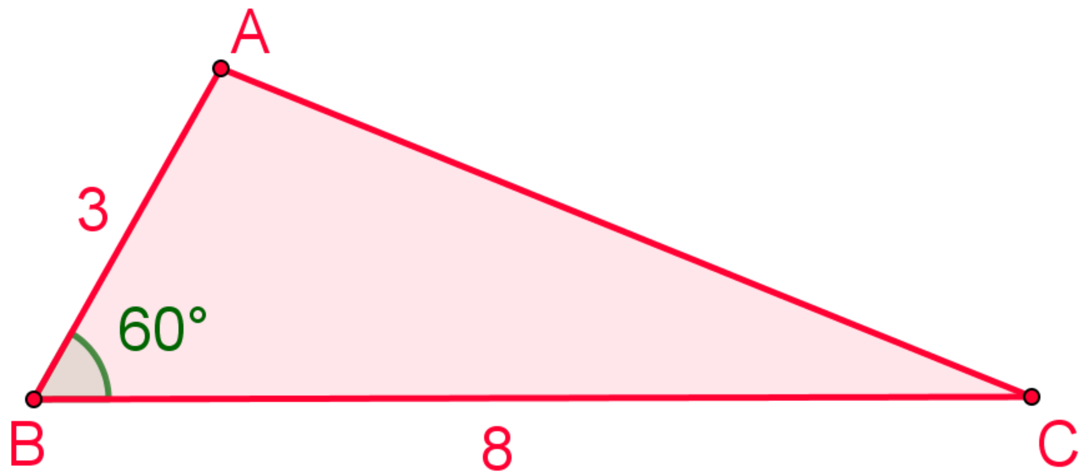
N°6



$$\cos 60° = ?$$

$$AC^2 = ?$$

N°6

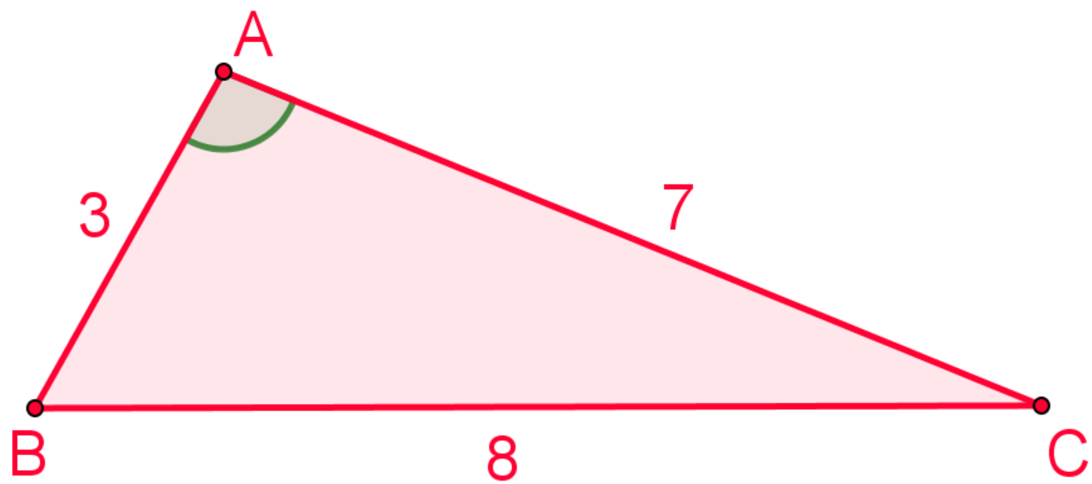


$$\cos 60° = ?$$

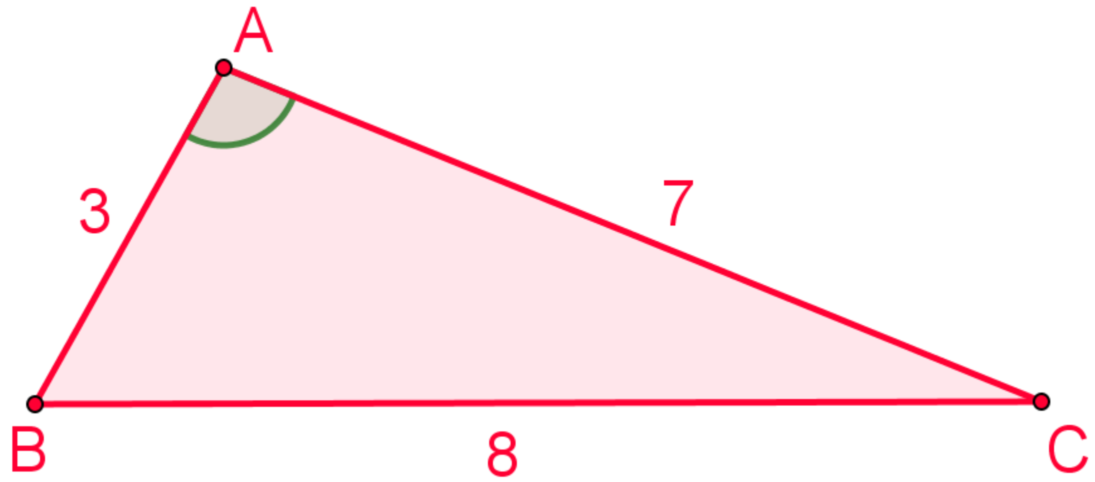
$$AC^2 = ?$$

$$\mathbf{AC = ?}$$

N°7

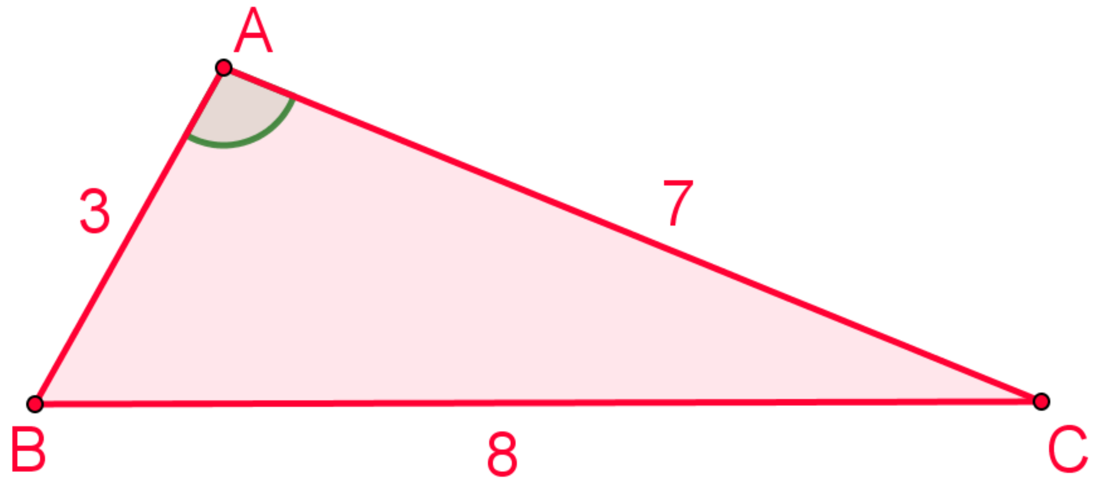


N°7



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

N°7

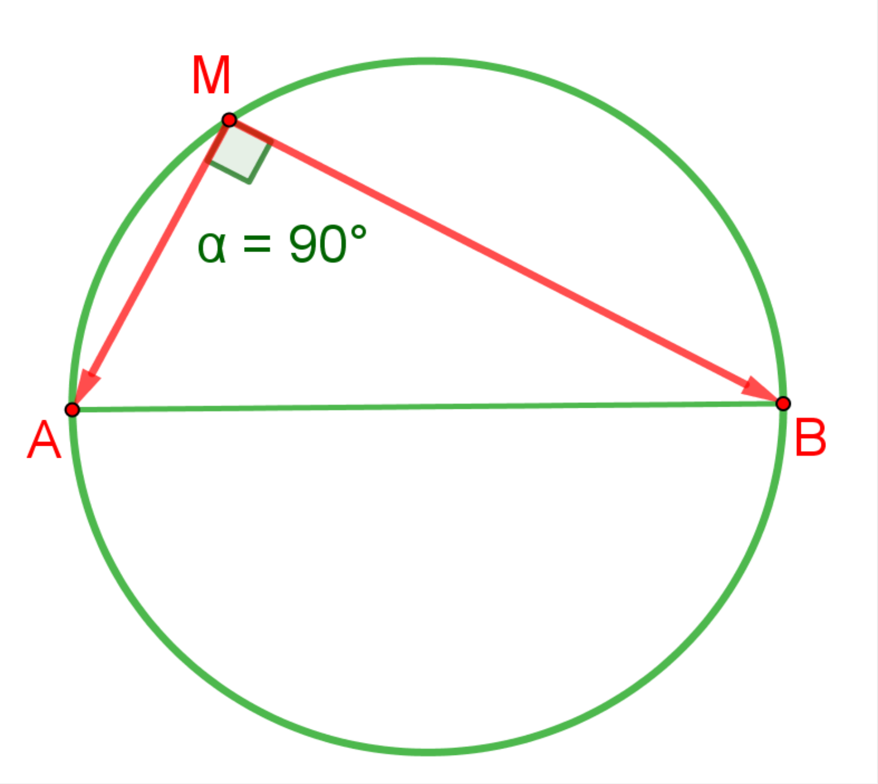


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

$\widehat{A}$ est-il aigu, droit ou obtus?

Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

C’est le cercle de diamètre [AB]



N°8

Une seule réponse est exacte.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MF}} = 0$ est :

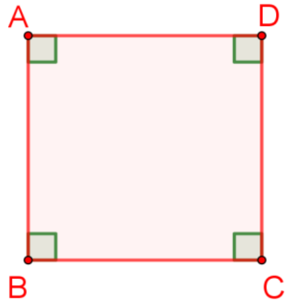
N°8

Une seule réponse est exacte.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MF}} = 0$ est :

a) Réduit aux points E et F
b) Le cercle de centre E passant par F
c) Le cercle de diamètre [EF]

N°9

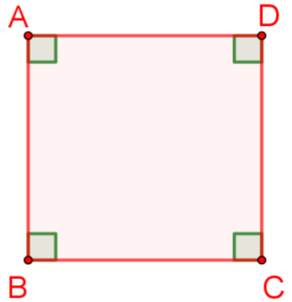


Une seule réponse est exacte.

ABCD est un carré.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ est :

N°9



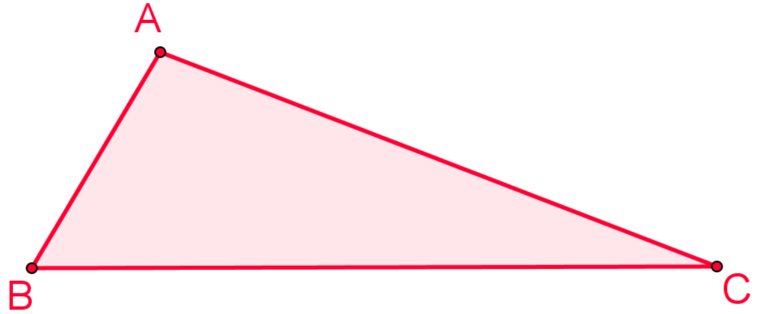
Une seule réponse est exacte.

ABCD est un carré.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ est :

a) Le cercle circonscrit au carré ABCD
b) La perpendiculaire en A à (AC)
c) Réduit aux points A et C

N°10



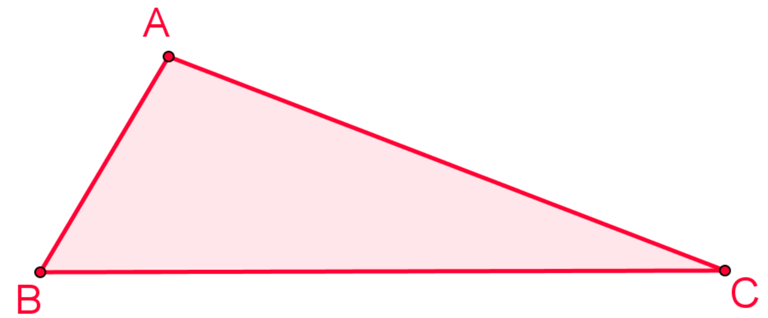
Une seule réponse est exacte.

ABC est un triangle

C_1 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$

C_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 0$

N°10



Une seule réponse est exacte.

ABC est un triangle

C_1 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$

C_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 0$

a) C_1 et C_2 n'ont aucun point commun

b) C_1 et C_2 ont un seul point commun

c) Le point H, pied de la hauteur issue de A est commun à C_1 et C_2

CORRECTION

N°1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = ?$$

N°1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 12}$$

N°2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\boldsymbol{\vec{u}} \cdot \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\vec{v}}\right) = ?$$

N°2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\boldsymbol{\vec{u}} \cdot \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\vec{v}}\right) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\vec{u}} \cdot \boldsymbol{\vec{v}} = \mathbf{9}$$

N°3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12\,,\ \ \|\vec{u}\| = 3 \text{ et } \|\vec{v}\| = 5.$$

$$\frac{1}{3}\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = ?$$

N°3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\frac{1}{3}\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = \frac{-2}{3}\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$$

N°4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = ?}$$

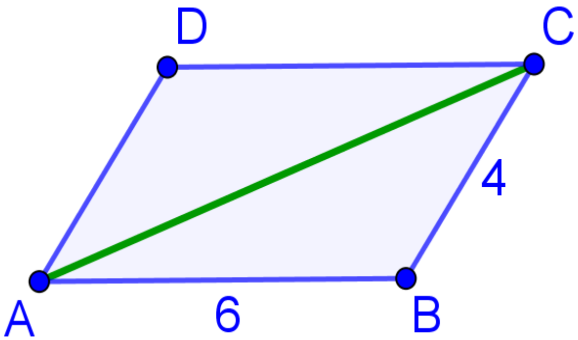
N°4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} = 6}$$

N°5



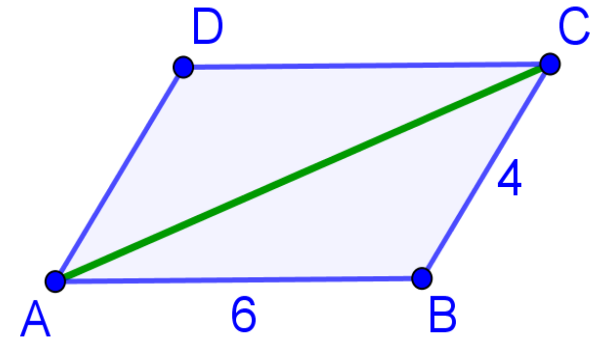
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}} =$

N°5



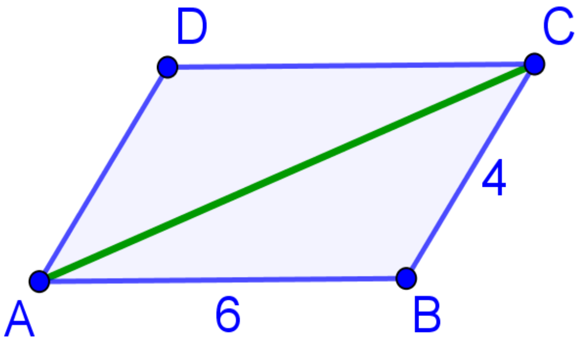
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{6}$$

N°5



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

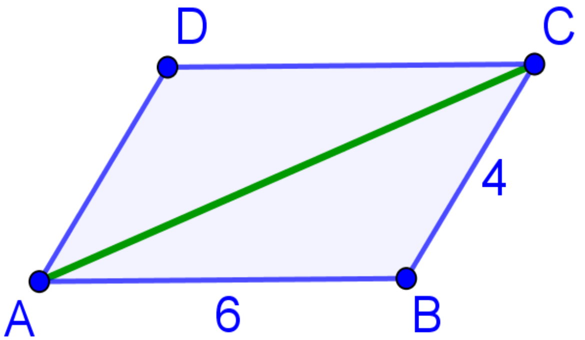
ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 6$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{6}$$

$$\mathbf{AC^2} =$$

N°5



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

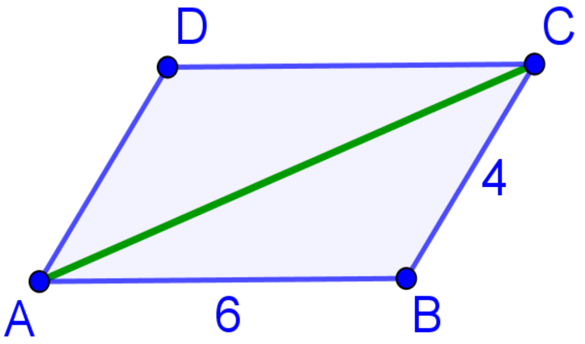
ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{6}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{AC}^2 &= \left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}\right\|^2\\ &= \mathbf{AB}^2 + \mathbf{BC}^2 + 2\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}\end{aligned}$$

N°5



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

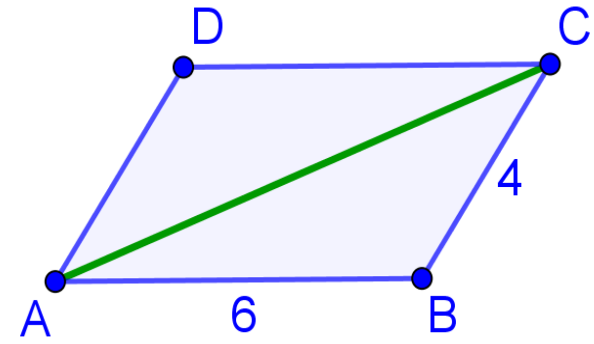
ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{6}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{AC}^2 &= \left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}\right\|^2 \\ &= \mathbf{AB}^2 + \mathbf{BC}^2 + \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}} \\ &= \mathbf{36} + \mathbf{16} + \mathbf{12} = \mathbf{64}\end{aligned}$$

N°5



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

ABCD est un parallélogramme.

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{6}$$

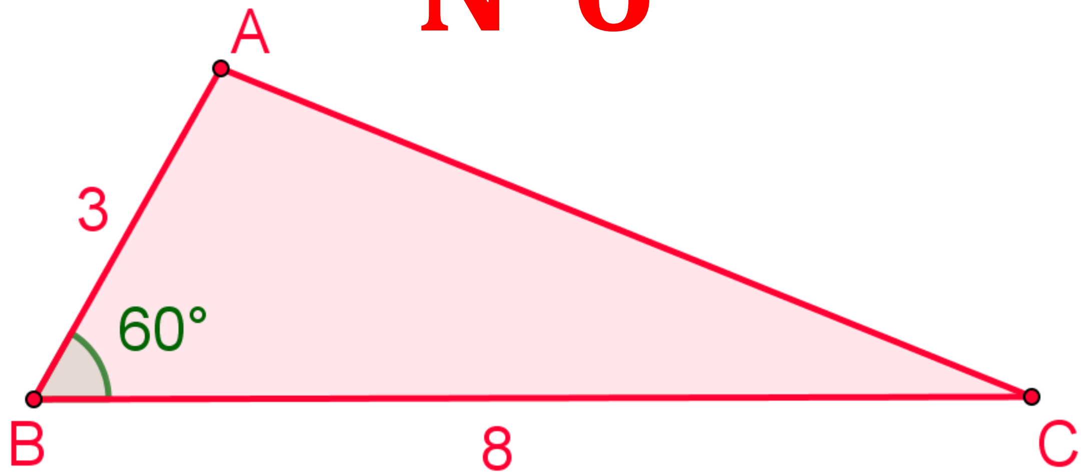
$$\mathbf{AC}^2 = \left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}\right\|^2$$

$$= \mathbf{AB}^2 + \mathbf{BC}^2 + \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}$$

$$= \mathbf{36} + \mathbf{16} + \mathbf{12} = \mathbf{64}$$

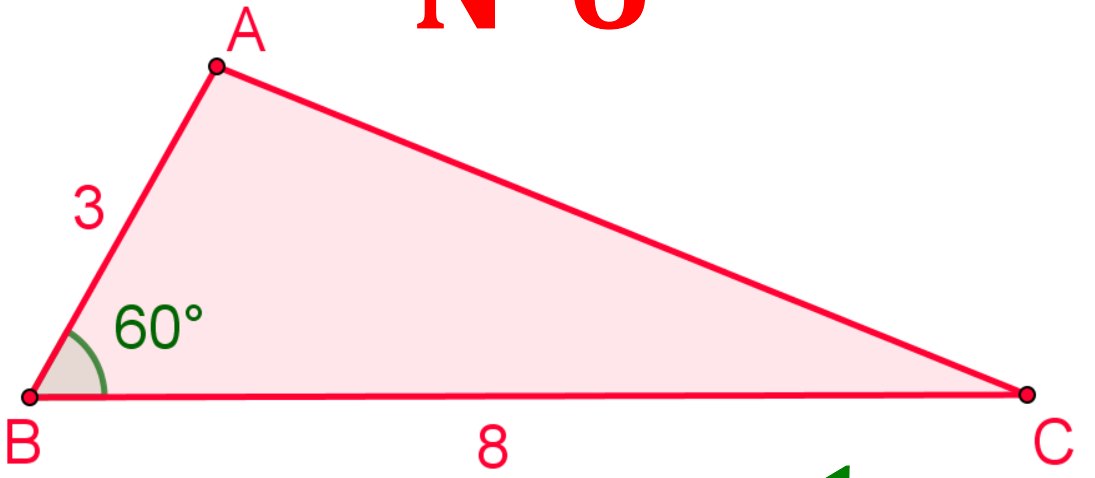
Donc
$\mathbf{AC = 8}$

N°6



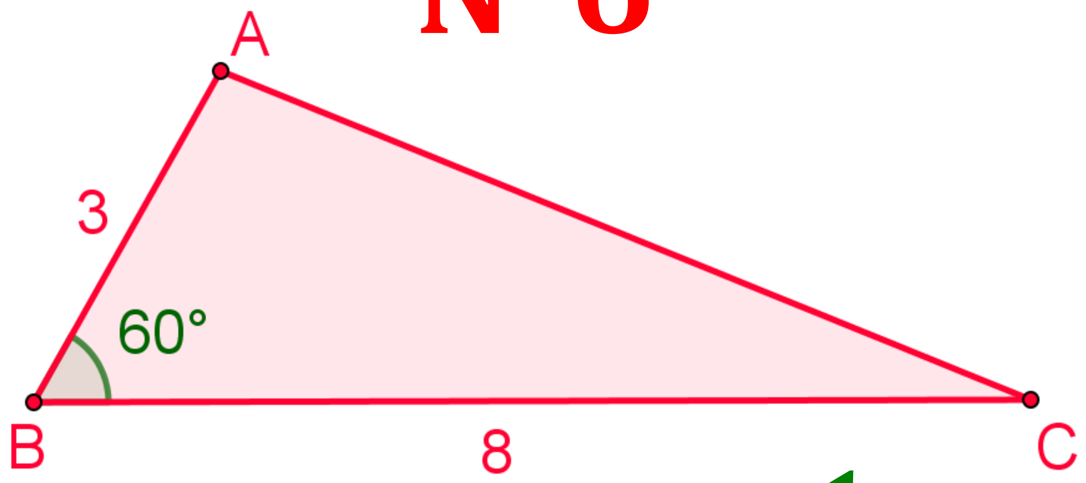
$$\cos 60° = ?$$

N°6



$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

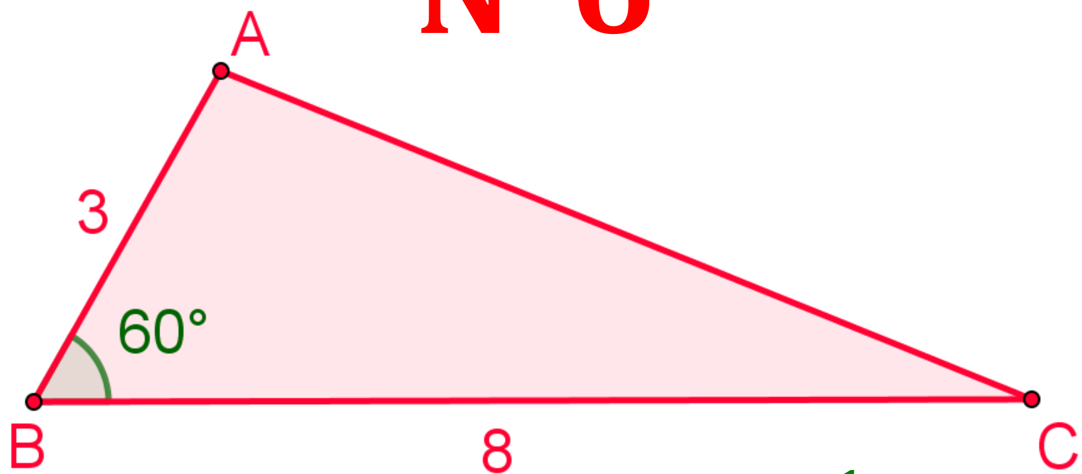
N°6



$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{AC^2 = ?}$$

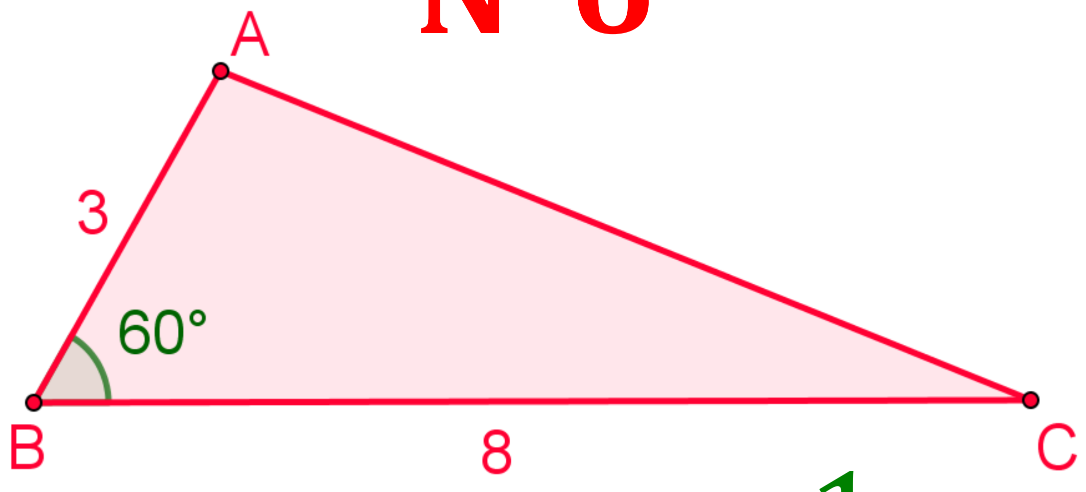
N°6



$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{AC}^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \frac{1}{2} =$$

N°6

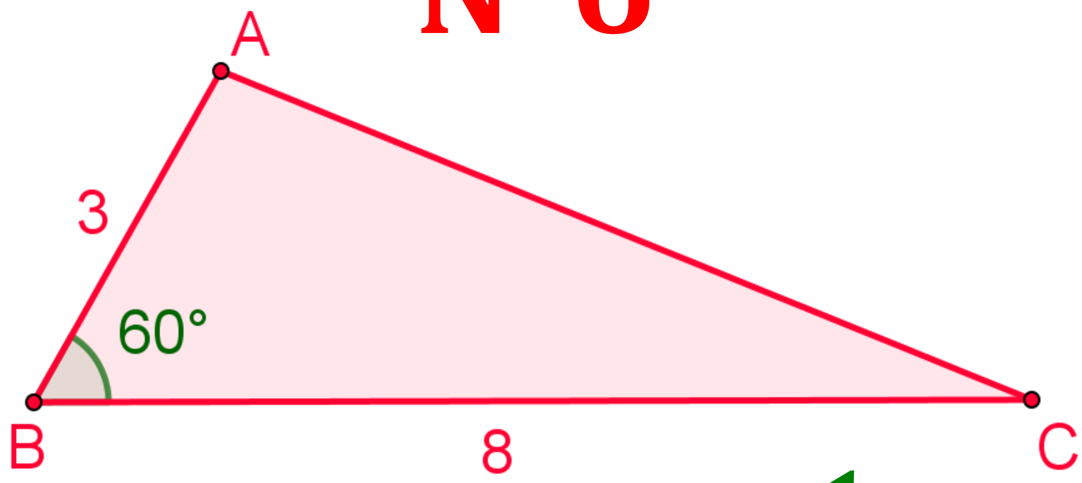


$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{AC^2} = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 49$$

$$\mathbf{AC =}$$

N°6

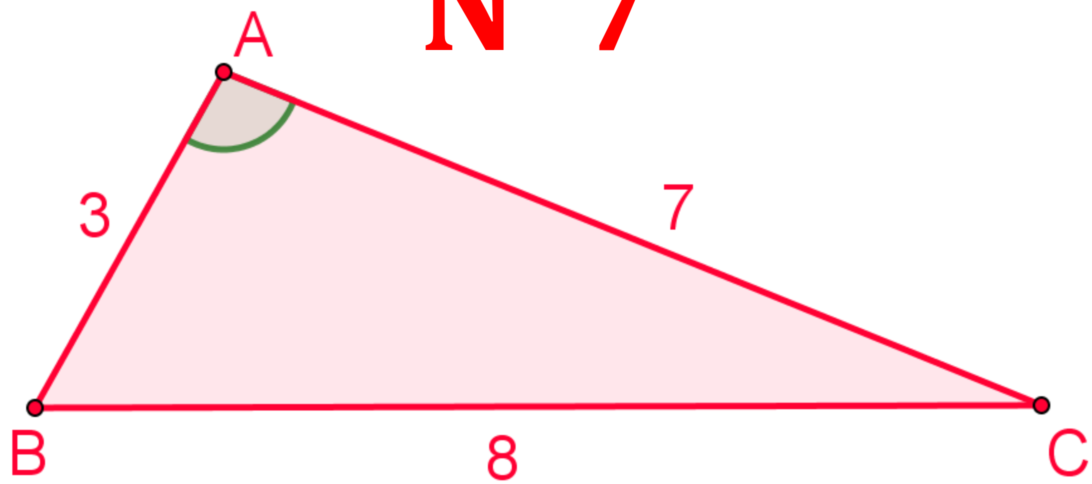


$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{AC^2} = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 49$$

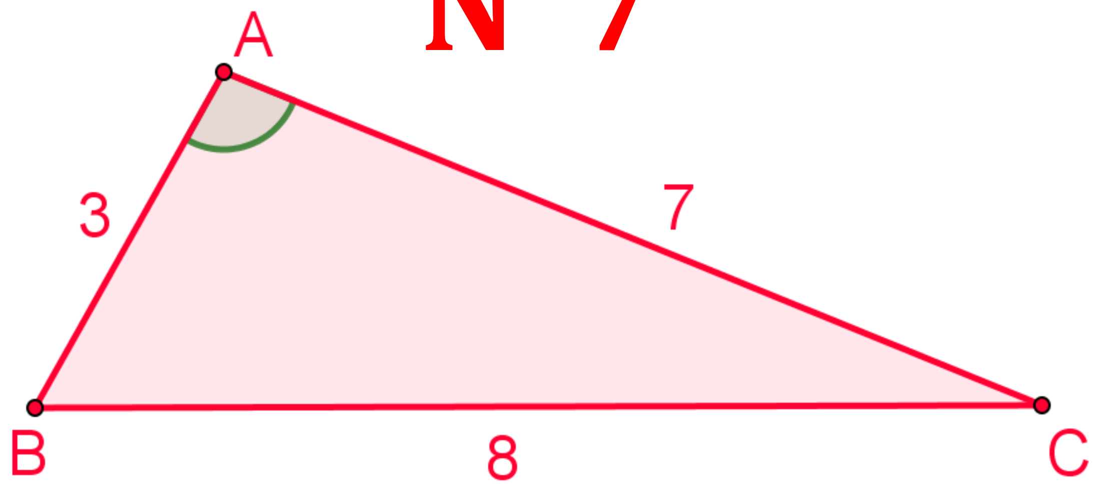
$$\mathbf{AC = 7}$$

N°7



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

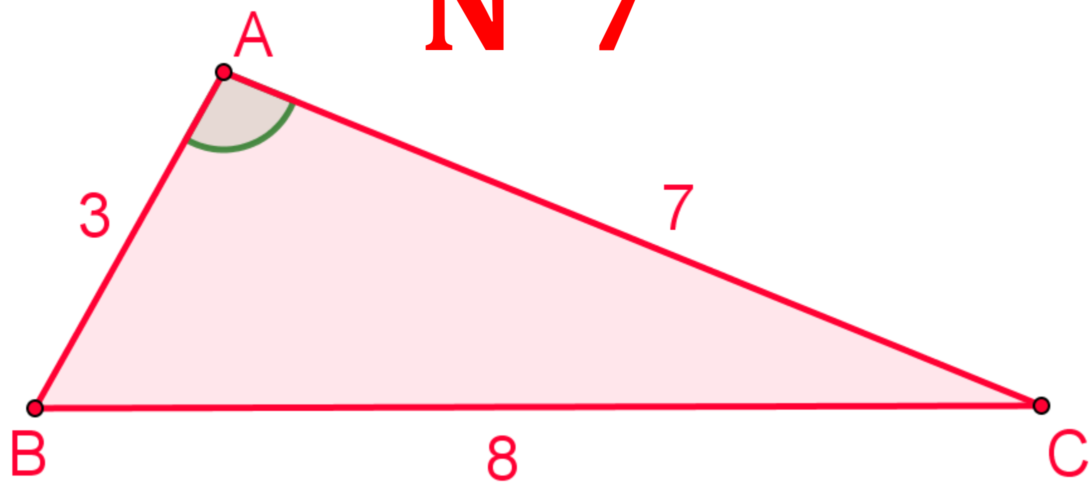
N°7



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

$$8^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times \cos \hat{A}$$

N°7

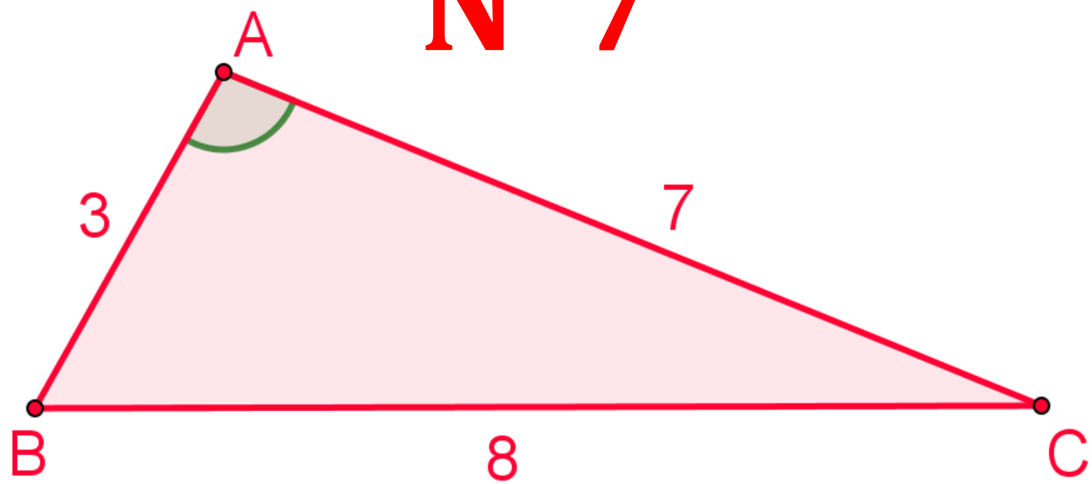


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{A}$$

$$8^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times \cos\widehat{A}$$

$$\cos\widehat{A} =$$

N°7

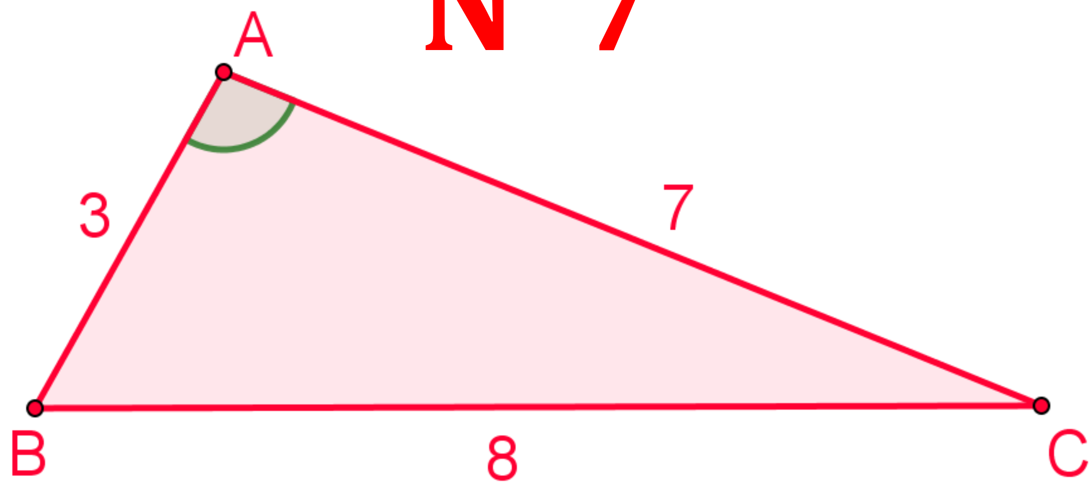


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

$$8^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times \cos \widehat{A}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{9 + 49 - 64}{42} < 0$$

N°7



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{A}$$

$$8^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times \cos \widehat{A}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{9 + 49 - 64}{42} < 0$$

$\widehat{A}$ est obtus

N°8

Une seule réponse est exacte.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MF}} = 0$ est :

a) Réduit aux points E et F
b) Le cercle de centre E passant par F
c) Le cercle de diamètre [EF]

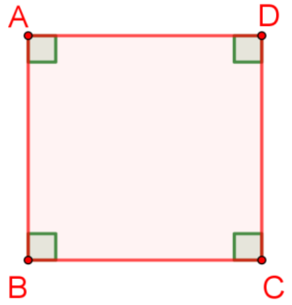
N°8

Une seule réponse est exacte.

L’ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{ME}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MF}} = 0$ est :

a) Réduit aux points E et F
b) Le cercle de centre E passant par F
c) Le cercle de diamètre [EF]

N°9



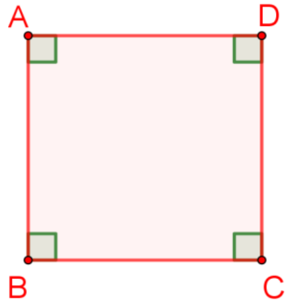
Une seule réponse est exacte.

ABCD est un carré.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ est :

a) Le cercle circonscrit au carré ABCD
b) La perpendiculaire en A à (AC)
c) Réduit aux points A et C

N°9



Une seule réponse est exacte.

ABCD est un carré.

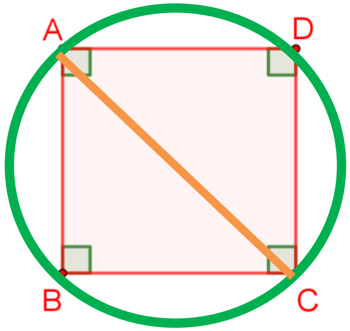
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ est :

a) Le cercle circonscrit au carré ABCD

b) La perpendiculaire en A à (AC)

c) Réduit aux points A et C

N°9



Une seule réponse est exacte.

ABCD est un carré.

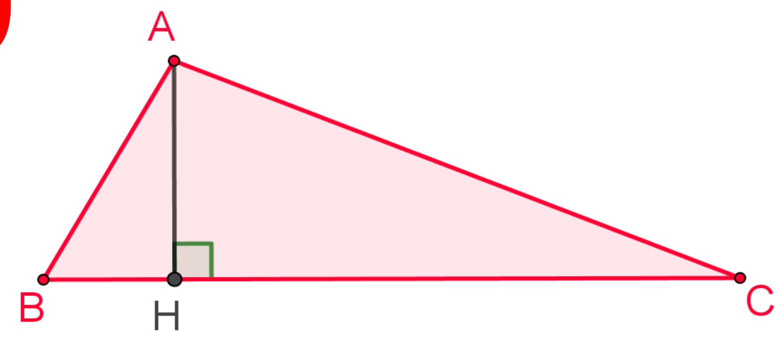
L’ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ est :

a) Le cercle circonscrit au carré ABCD

b) La perpendiculaire en A à (AC)

c) Réduit aux points A et C

N°10



Une seule réponse est exacte.

ABC est un triangle

C_1 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

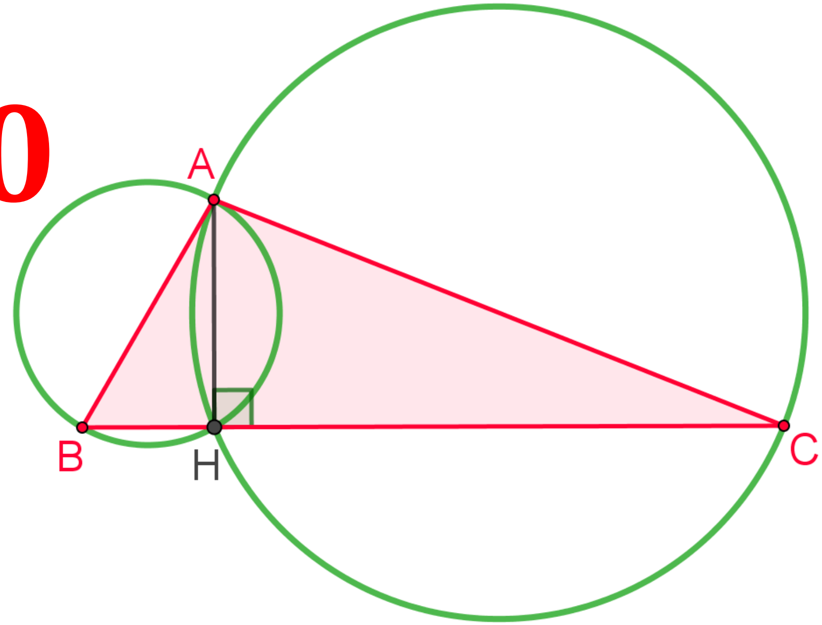
C_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

a) C_1 et C_2 n'ont aucun point commun

b) C_1 et C_2 ont un seul point commun

c) Le point H, pied de la hauteur issue de A est commun à C_1 et C_2

N°10



Une seule réponse est exacte.

ABC est un triangle

C_1 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

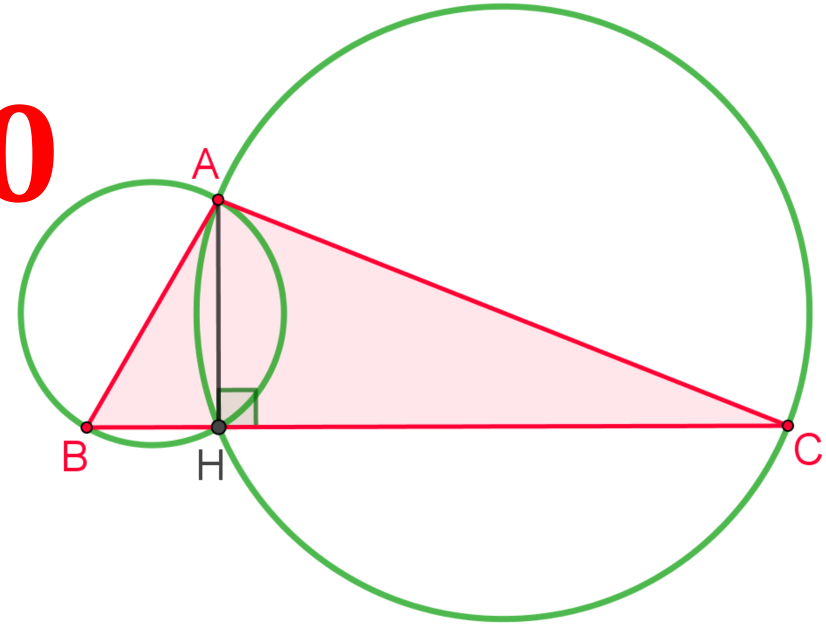
C_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

a) C_1 et C_2 n'ont aucun point commun

b) C_1 et C_2 ont un seul point commun

c) Le point H, pied de la hauteur issue de A est commun à C_1 et C_2

N°10



Une seule réponse est exacte.

ABC est un triangle

C_1 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

C_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

a) C_1 et C_2 n'ont aucun point commun

b) C_1 et C_2 ont un seul point commun

c) Le point H, pied de la hauteur issue de A est commun à C_1 et C_2

Fin