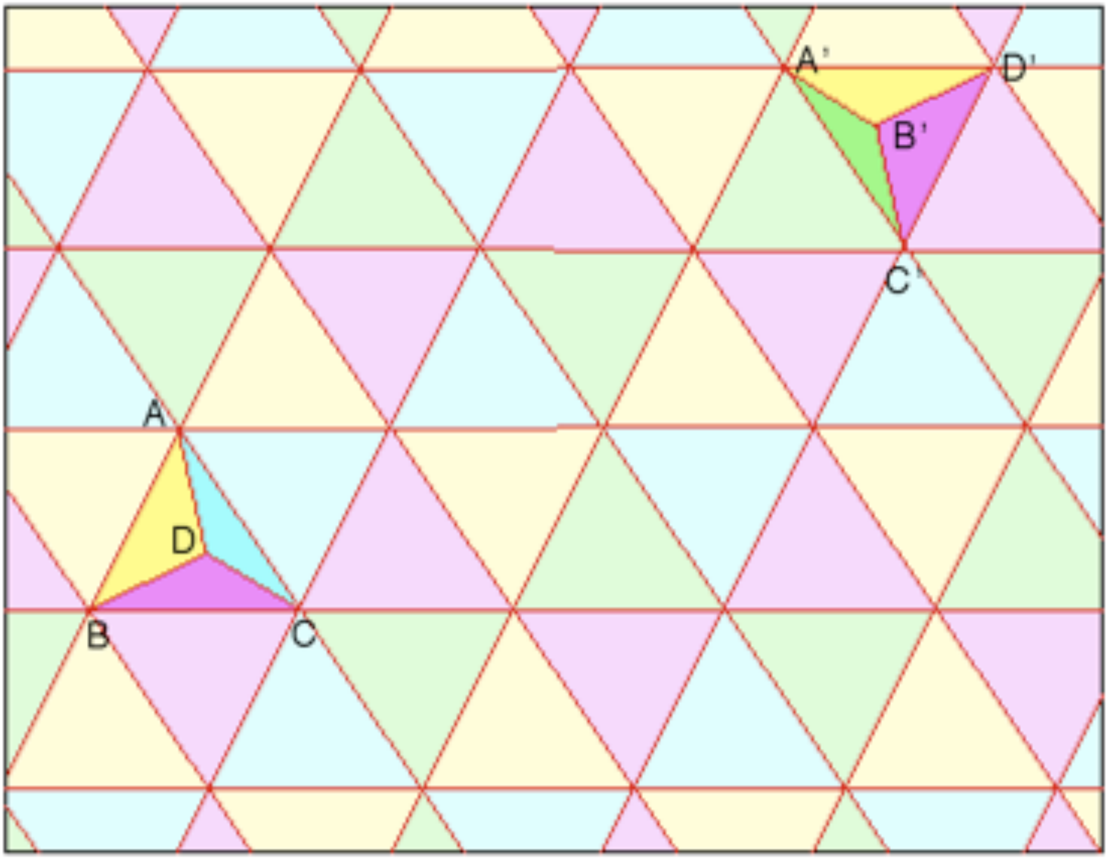
Un tétraèdre qui roule

Un tétraèdre T de sommets ABCD, dont les quatre faces sont égales, est tel que AB = CD, AC = BD et AD = BC.

Colorons ses faces en bleu, jaune, vert et violet et posons le tétraèdre sur un plan. Ici au départ, la face ABC (verte) touche le plan et le point D est hors du plan. En immobilisant l'arête AC, faisons basculer T de sorte que la face ACD (bleue) vienne dans le plan. Nous dirons que nous faisons rouler le tétraèdre sans glissement.

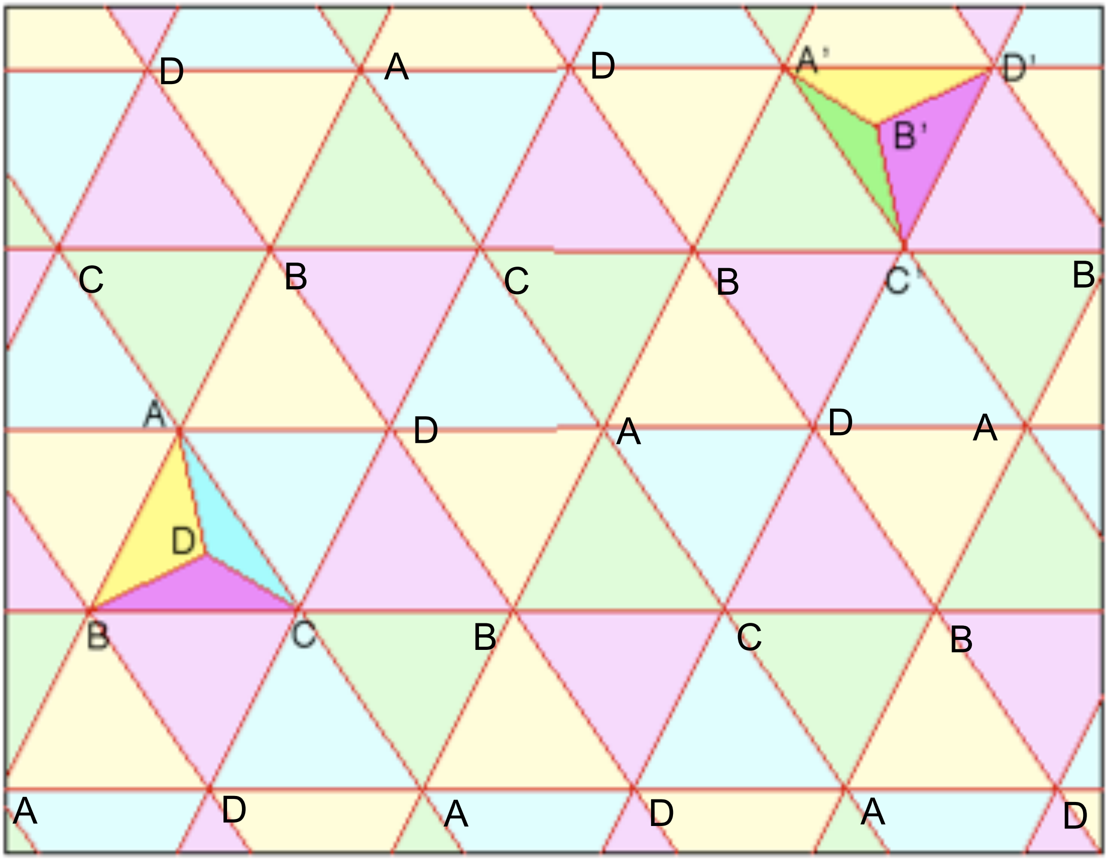


De proche en proche, nous pouvons faire rouler le tétraèdre jusqu'à la position représentée en haut à droite.

Ce qui est remarquable est que : quel que soit le trajet que nous emprunterons la face ACD viendra en A'C'D' (sommet à sommet) et le point B sera hors du plan. Ce qui n'est pas le cas si on fait rouler un cube.

Pour s'en convaincre, vérifier qu'il n'y a qu'une manière d'étiqueter les sommets du treillis (construit à partir du triangle ABC) avec les lettres de A à D qui respecte les contraintes du roulement décrit ci-dessus.

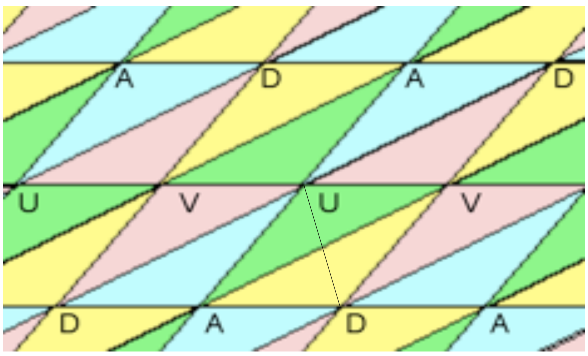
Si on considère que le tétraèdre est un tampon encreur, alors (en roulant de toutes les manières possibles) il va imprimer sur le plan un pavage de type p2 (selon la nomenclature des cristallographes). Chaque nœud du treillis sera un centre de demi-tour.



Remarque 1 : Ici le triangle ABC semble équilatéral mais il ne l'est pas. Ce choix est fait pour que D se projette à l'intérieur du triangle ABC. Vérifier que D est l'orthocentre du triangle dont les sommets sont les D les plus proches.

Remarque 2 : Si le triangle ABC est rectangle alors le point D complète le rectangle ; le tétraèdre est aplati, il devient une enveloppe rectangulaire (beaucoup plus facile à se procurer qu'un tétraèdre, dont les quatre faces sont égales).

Remarque 3 : Au delà, si le triangle possède un angle obtus, il n'est pas possible (avec ce triangle) de matérialiser le tétraèdre qui roule. Il faut choisir pour engendrer le même réseau un triangle d'aire minimum et de périmètre minimum : ci-dessous ADU.



Ce triangle est unique si le réseau n'est pas rectangulaire ; sinon il existe deux tels triangles (rectangles et images en miroir l'un de l'autre).

Découpe des enveloppes

En ouvrant une enveloppe rectangulaire fermée, de manière connexe, nous venons de voir que l'on obtient un patron qui, reproduit en nombre de manière directe, permet un pavage du plan de type p2.

Le pavage d'Escher ci-dessous en est un exemple classique :

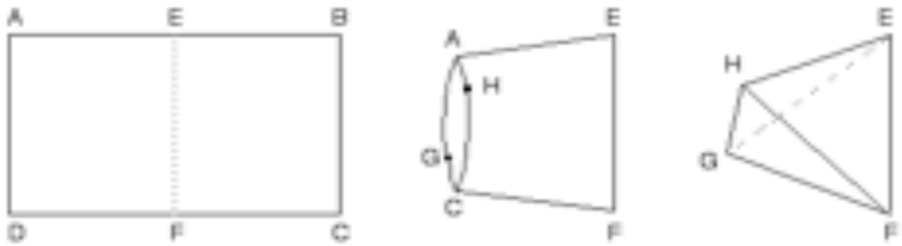
Travaux pratiques

Imprimer et découper le rectangle vert. Le plier en deux selon la plus petite médiane ; on obtient un carré, double épaisseur. Avec du scotch transparent, fermer les trois côtés ouverts, pour obtenir une enveloppe fermée. Ouvrir cette enveloppe, en la découpant selon les lignes tracées, pour libérer l'oiseau.

Plus généralement

Partant d'un rectangle ABCD :

- repérer les milieux, notés E et F, de AB et CD ;
- coller bord à bord AE avec EB et DF avec FC. On obtient un "sachet", qui peut être considéré comme une enveloppe rectangulaire ACFE, fermée sur trois cotés.
- choisir un point arbitraire G sur AD et son opposé H sur BC ;
- coller le bord GH (contenant A) au bord GH (contenant C). L'enveloppe ACFE se déforme en un tétraèdre dont les quatre faces sont les triangles égaux : EFG, EFH, EGH et FGH.



Il n'est pas nécessaire de matérialiser par un pli les arêtes EG, EH, FG et FH.

En découpant cette surface, de manière arbitraire, dans le but de l'aplatir en un seul morceau, on obtient un "pavé", qui (reproduit indéfiniment) permet de paver le plan selon le type p2 des cristallographes.

Pour un dessin de type p2, le tétraèdre aplati ou pas est le quotient conforme (sans déformation) du plan selon le groupe.

Pour p1, le quotient est un tore, qui ne peut être conforme.

En revanche, pour p3, p4 et p6 les quotients conformes sont des enveloppes fermées : triangle équilatéral pour p3 ; triangle rectangle isocèle pour p4 et triangle rectangle demi-équilatéral pour p6.

Trouver les enveloppes