

Les fractions continues

Journées APMEP

Bruno Aebischer, Toulouse, 20 octobre 2014

IREM de Franche-Comté
Université de Franche-Comté



Pourquoi des fractions continues ?

Je vais vous décrire quelques situations très diverses qu'on ne peut vraiment comprendre qu'avec cet outil.



Les plantes

Les plantes font des maths : si on compte les spirales d'une pomme de pin, d'un chou romanesco ou d'un tournesol, on trouve...



Introduction

Théorie des Fractions continues

Géométrie et fractions continues

Astronomie et fractions continues

Les plantes font des maths

Mes suites bizarres (un algorithme étonnant)

Pourquoi des fractions continues ?

Les plantes

L'astronomie

Un algorithme étonnant

Géométrie à l'infini

L'outil

Les plantes



Introduction

Théorie des Fractions continues

Géométrie et fractions continues

Astronomie et fractions continues

Les plantes font des maths

Mes suites bizarres (un algorithme étonnant)

Pourquoi des fractions continues ?

Les plantes

L'astronomie

Un algorithme étonnant

Géométrie à l'infini

L'outil

Les plantes



Institut de recherche en Électronique des mathématiques
UMR 5175 - CNRS - Université de Toulouse

Les plantes



Institut de recherche en Électronique et Mathématiques
UMR 5175 - IREM

Les plantes

3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

Coïncidence ? Je ne crois pas !



L'automate de Huygens

Huygens explique dans un de ses ouvrages, avoir construit un automate pour modéliser le mouvement des planètes.



L'automate de Huygens

Huygens explique dans un de ses ouvrages, avoir construit un automate pour modéliser le mouvement des planètes.

La terre et Saturne sont reliés dans cet automate par un engrenage formé d'une roue à 206 dents et d'une autre avec seulement 7 dents.

Le rapport des durées de révolution sur leurs orbites de ces deux planètes est $\rho = 29,4254485$. Quelle relation y a-t-il entre ces trois nombres 7, 206 et ρ ?



L'automate de Huygens

Huygens explique dans un de ses ouvrages, avoir construit un automate pour modéliser le mouvement des planètes.

La terre et Saturne sont reliés dans cet automate par un engrenage formé d'une roue à 206 dents et d'une autre avec seulement 7 dents.

Le rapport des durées de révolution sur leurs orbites de ces deux planètes est $\rho = 29,4254485$. Quelle relation y a-t-il entre ces trois nombres 7, 206 et ρ ?

$$\frac{206}{7} \simeq \rho. \text{ OK.}$$

Mais d'où lui est venue l'idée de prendre 206 et 7 ?



Introduction

Théorie des Fractions continues

Géométrie et fractions continues

Astronomie et fractions continues

Les plantes font des maths

Mes suites bizarres (un algorithme étonnant)

Pourquoi des fractions continues ?

Les plantes

L'astronomie

Un algorithme étonnant

Géométrie à l'infini

L'outil

Combien de jours par an ?



Combien de jours par an ?

Il y a des années bissextiles tous les quatre ans.



Combien de jours par an ?

Il y a des années bissextiles tous les quatre ans. Sauf tous les 100 ans.



Combien de jours par an ?

Il y a des années bissextiles tous les quatre ans. Sauf tous les 100 ans. Encore que.



Combien de jours par an ?

Il y a des années bissextiles tous les quatre ans. Sauf tous les 100 ans. Encore que.

Est-ce la méthode la plus pertinente pour éviter que le début du printemps ne finisse par tomber le 23 septembre ?



Un algorithme étonnant

Soit f la fonction définie par $f(x) = a \cos x + b \sin x$.



Un algorithme étonnant

Soit f la fonction définie par $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

On construit une suite d'entiers ainsi : $u_0 = 0$; soit $S = f(u_0)$.



Un algorithme étonnant

Soit f la fonction définie par $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

On construit une suite d'entiers ainsi : $u_0 = 0$; soit $S = f(u_0)$.

On prendra pour u_1 le plus petit entier n tel que $f(n) > S$. $f(u_1)$ sera le nouveau S .



Un algorithme étonnant

Soit f la fonction définie par $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

On construit une suite d'entiers ainsi : $u_0 = 0$; soit $S = f(u_0)$.

On prendra pour u_1 le plus petit entier n tel que $f(n) > S$. $f(u_1)$ sera le nouveau S .

Si on a construit les entiers $u_0 < u_1 < \dots < u_k$ tels que $f(u_0) < f(u_1) < \dots < f(u_k)$, avec $S = f(u_k)$, alors



Un algorithme étonnant

Soit f la fonction définie par $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

On construit une suite d'entiers ainsi : $u_0 = 0$; soit $S = f(u_0)$.

On prendra pour u_1 le plus petit entier n tel que $f(n) > S$. $f(u_1)$ sera le nouveau S .

Si on a construit les entiers $u_0 < u_1 < \dots < u_k$ tels que $f(u_0) < f(u_1) < \dots < f(u_k)$, avec $S = f(u_k)$, alors u_{k+1} est le plus petit entier n tel que $f(n) > S$.



Un algorithme étonnant

Soit f la fonction définie par $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

On construit une suite d'entiers ainsi : $u_0 = 0$; soit $S = f(u_0)$.

On prendra pour u_1 le plus petit entier n tel que $f(n) > S$. $f(u_1)$ sera le nouveau S .

Si on a construit les entiers $u_0 < u_1 < \dots < u_k$ tels que $f(u_0) < f(u_1) < \dots < f(u_k)$, avec $S = f(u_k)$, alors

u_{k+1} est le plus petit entier n tel que $f(n) > S$.

Et $f(u_{k+1})$ est le nouveau S .



Un algorithme étonnant

Cette suite semble toujours être 710-arithmétique pendant un certain temps.



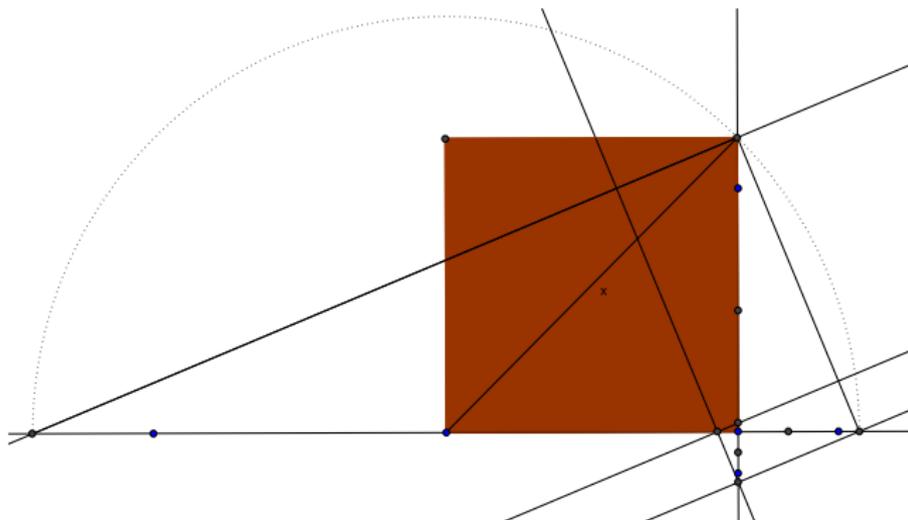
Institut de recherche en informatique et mathématiques
Sorbonne Université
www.irif.fr

Géométrie

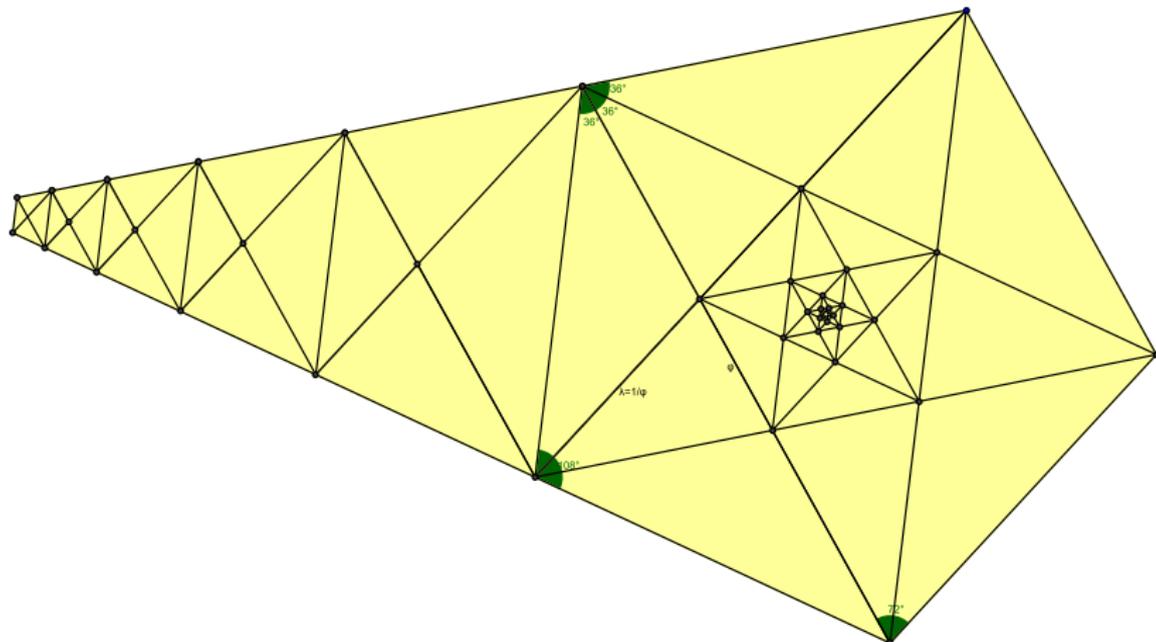
Les figures qui suivent prouvent l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{5}$, respectivement.



Géométrie



Géométrie



Introduction

Théorie des Fractions continues

Géométrie et fractions continues

Astronomie et fractions continues

Les plantes font des maths

Mes suites bizarres (un algorithme étonnant)

Pourquoi des fractions continues ?

Les plantes

L'astronomie

Un algorithme étonnant

Géométrie à l'infini

L'outil

L'outil

Pour comprendre tous ces phénomènes, on doit savoir utiliser l'outil « Fractions continues » et comprendre quelques propriétés.



L'outil

Pour comprendre tous ces phénomènes, on doit savoir utiliser l'outil
« Fractions continues » et comprendre quelques propriétés.
Tout ceci en lien avec l'algorithme d'Euclide



Algorithme d'Euclide

Pour trouver le p.g.c.d. de deux nombres, $a = 1077$ et $b = 173$, on sait faire des divisions euclidiennes successives :

- $1077 = 173 \times 6 + 39$



Algorithme d'Euclide

Pour trouver le p.g.c.d. de deux nombres, $a = 1077$ et $b = 173$, on sait faire des divisions euclidiennes successives :

- $1077 = 173 \times 6 + 39$
- $173 = 39 \times 4 + 17$



Algorithme d'Euclide

Pour trouver le p.g.c.d. de deux nombres, $a = 1077$ et $b = 173$, on sait faire des divisions euclidiennes successives :

- $1077 = 173 \times 6 + 39$
- $173 = 39 \times 4 + 17$
- $39 = 17 \times 2 + 5$



Algorithme d'Euclide

Pour trouver le p.g.c.d. de deux nombres, $a = 1077$ et $b = 173$, on sait faire des divisions euclidiennes successives :

- $1077 = 173 \times 6 + 39$
- $173 = 39 \times 4 + 17$
- $39 = 17 \times 2 + 5$
- $17 = 5 \times 3 + 2$



Algorithme d'Euclide

Pour trouver le p.g.c.d. de deux nombres, $a = 1077$ et $b = 173$, on sait faire des divisions euclidiennes successives :

- $1077 = 173 \times 6 + 39$
- $173 = 39 \times 4 + 17$
- $39 = 17 \times 2 + 5$
- $17 = 5 \times 3 + 2$
- $5 = 2 \times 2 + 1$



Algorithme d'Euclide

Pour trouver le p.g.c.d. de deux nombres, $a = 1077$ et $b = 173$, on sait faire des divisions euclidiennes successives :

- $1077 = 173 \times 6 + 39$
- $173 = 39 \times 4 + 17$
- $39 = 17 \times 2 + 5$
- $17 = 5 \times 3 + 2$
- $5 = 2 \times 2 + 1$
- $2 = 1 \times 2 + 0$



Algorithme d'Euclide

On note : $a = r_0$; $b = r_1$.

La première division s'écrit $r_0 = q_1 r_1 + r_2$. Le premier quotient est donc noté q_1 et le premier reste est noté r_2 .

Puis l'algorithme peut se résumer en

- Tant que $r_{n+1} \neq 0$ faire $r_{n-1} = q_n r_n + r_{n+1}$ avec $r_{n+1} < r_n$.



Vers les fractions continues

Divisons par r_n l'égalité précédente :

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n + \frac{r_{n+1}}{r_n}$$



Vers les fractions continues

Et appliquons cela aux nombres précédents :

- $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{39}{173}$



Vers les fractions continues

Et appliquons cela aux nombres précédents :

- $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{39}{173}$
- $\frac{173}{39} = 4 + \frac{17}{39}$



Vers les fractions continues

Et appliquons cela aux nombres précédents :

- $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{39}{173}$
- $\frac{173}{39} = 4 + \frac{17}{39}$
- $\frac{39}{17} = 2 + \frac{5}{17}$



Vers les fractions continues

Et appliquons cela aux nombres précédents :

- $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{39}{173}$
- $\frac{173}{39} = 4 + \frac{17}{39}$
- $\frac{39}{17} = 2 + \frac{5}{17}$
- $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$
- $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$



Vers les fractions continues

Et appliquons cela aux nombres précédents :

- $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{39}{173}$
- $\frac{173}{39} = 4 + \frac{17}{39}$
- $\frac{39}{17} = 2 + \frac{5}{17}$
- $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$
- $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{1} = 2 + \frac{0}{1}$



Vers les fractions continues

En remarquant que le dernier terme de chaque ligne est l'inverse du premier terme de la ligne suivante, on peut écrire, en mettant tout bout à bout :

$$\frac{1077}{173} = 6 + \frac{1}{\frac{173}{39}} = 6 + \frac{1}{4 + \frac{17}{39}} = 6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{39}{17}}}$$

Et puisque

$$\frac{39}{17} = 2 + \frac{5}{17} = 2 + \frac{1}{\frac{17}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$



Vers les fractions continues

● On a $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$



Vers les fractions continues

- On a $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$
- ce qu'on écrit aussi $\frac{1077}{173} = [6; 4, 2, 3, 2, 2]$



Vers les fractions continues

- On a $\frac{1077}{173} = 6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$

- ce qu'on écrit aussi $\frac{1077}{173} = [6; 4, 2, 3, 2, 2]$

- C'est le développement en fraction continue du nombre rationnel $\frac{1077}{173}$



Vocabulaire

Si $x = \frac{a}{b}$ est un nombre rationnel, les quotients $(q_i)_{1 \leq i \leq N}$ obtenus en répétant l'algorithme d'Euclide sont (sans surprise) les quotients de la fraction continue

$$[q_1; q_2, \dots, q_N] = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}} \text{ qui représente } x.$$



Vocabulaire

Chaque fois qu'on s'arrête avant de terminer la fraction continue, on écrit des *réduites* de la fraction continue. Ce sont les nombres

$$R_1 = q_1 = [q_1], \quad R_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = [q_1; q_2],$$

$$R_3 = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = [q_1; q_2, q_3], \dots$$



Calcul des réduites

Le calcul des réduites est compliqué, car si on peut assez facilement calculer

$$R_1 = q_1 = [q_1] \text{ et } R_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = [q_1; q_2], \text{ déjà c'est plus}$$

compliqué pour

$$R_3 = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = [q_1; q_2, q_3], \text{ car } R_3 = q_1 + \frac{1}{[q_2; q_3]}$$

Le calcul de R_2 ne nous aide pas.

On utilisera une variante de l'algorithme d'Euclide étendu.



Coefficients de Bezout

On sait maintenant que le pgcd de 1077 et 173 est 1.

Pour trouver les nombres (u, v) de Bezout (tels que $au + bv = 1$), on peut au choix :

- « Remonter » l'algorithme précédent. C'est long, fastidieux et difficilement programmable.



Coefficients de Bezout

On sait maintenant que le pgcd de 1077 et 173 est 1.
Pour trouver les nombres (u, v) de Bezout (tels que $au + bv = 1$),
on peut au choix :

- « Remonter » l'algorithme précédent. C'est long, fastidieux et difficilement programmable.
- Ou alors utiliser un algorithme d'Euclide étendu.



Algorithme d'Euclide étendu

On construit deux suites (finies) u_n et v_n telles que pour tout n , on ait $au_n + bv_n = r_n$.

Très naturellement, il suffit de bien choisir u_0, v_0, u_1, v_1 et d'utiliser ensuite *la même formule* de récurrence double que pour r_n :

$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}$, donc $r_{n+1} = r_{n-1} - r_n q_n$.



Algorithme d'Euclide étendu

- Donc on construit (u_n) et (v_n) ainsi :



Algorithme d'Euclide étendu

- Donc on construit (u_n) et (v_n) ainsi :
- $u_0 = 1, v_0 = 0$ pour que $au_0 + bv_0 = a = r_0$



Algorithme d'Euclide étendu

- Donc on construit (u_n) et (v_n) ainsi :
- $u_0 = 1, v_0 = 0$ pour que $au_0 + bv_0 = a = r_0$
- $u_1 = 0, v_1 = 1$ pour que $au_1 + bv_1 = b = r_1$



Algorithme d'Euclide étendu

- Donc on construit (u_n) et (v_n) ainsi :
- $u_0 = 1, v_0 = 0$ pour que $au_0 + bv_0 = a = r_0$
- $u_1 = 0, v_1 = 1$ pour que $au_1 + bv_1 = b = r_1$
- $u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n$ et $v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$ et on vérifie qu'on a bien $au_n + bv_n = r_n$ par récurrence double.



Algorithme d'Euclide étendu

- Donc on construit (u_n) et (v_n) ainsi :
- $u_0 = 1, v_0 = 0$ pour que $au_0 + bv_0 = a = r_0$
- $u_1 = 0, v_1 = 1$ pour que $au_1 + bv_1 = b = r_1$
- $u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n$ et $v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$ et on vérifie qu'on a bien $au_n + bv_n = r_n$ par récurrence double.
- Il peut être pratique de disposer les calculs dans un tableau.



Algorithme d'Euclide étendu

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	\times	1077	1	0
1	6	173	0	1
2	4	39	1	-6
3	2	17	-4	25
4	3	5	9	-56
5	2	2	-31	193
6	2	1	71	-442
7	\times	0	-173	1077



Algorithme d'Euclide étendu

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	×	1077	1	0
1	6	173	0	1
2	4	39	1	-6
3	2	17	-4	25
4	3	5	9	-56
5	2	2	-31	193
6	2	1	71	-442
7	×	0	-173	1077

$$1077 \times 1 + 173 \times 0 = 1077$$

$$1077 \times 0 + 173 \times 1 = 173$$

$$1077 \times 1 + 173 \times (-6) = 39$$

$$1077 \times (-4) + 173 \times 25 = 17$$

$$1077 \times 9 + 173 \times (-56) = 5$$

$$1077 \times (-31) + 173 \times 193 = 2$$

$$1077 \times 71 + 173 \times (-442) = 1$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Et si on remplaçait le $-$ par un $+$ dans les formules de récurrence pour calculer les u_n et v_n ?

$$u_{n+1} = u_{n-1} + q_n u_n \text{ et } v_{n+1} = v_{n-1} + q_n v_n$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Et si on remplaçait le $-$ par un $+$ dans les formules de récurrence pour calculer les u_n et v_n ?

$$u_{n+1} = u_{n-1} + q_n u_n \text{ et } v_{n+1} = v_{n-1} + q_n v_n.$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Et si on remplaçait le $-$ par un $+$ dans les formules de récurrence pour calculer les u_n et v_n ?

$$u_{n+1} = u_{n-1} + q_n u_n \text{ et } v_{n+1} = v_{n-1} + q_n v_n.$$

Même initialisation ou presque : on change aussi un des signes !

- $u_0 = 1, v_0 = 0$ pour que $au_0 - bv_0 = a = (-1)^0 r_0$
- $u_1 = 0, v_1 = 1$ pour que $au_1 - bv_1 = -b = (-1)^1 r_1$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Pour l'exemple 1077 et 173 :



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	×	1077	1	0
1	6	173	0	1
2	4	39	1	6
3	2	17	4	25
4	3	5	9	56
5	2	2	31	193
6	2	1	71	442
7	×	0	173	1077



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Il n'y a plus de signe $-$ dans les colonnes u_n et v_n , mais ce sont les mêmes nombres en valeur absolue.



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Il n'y a plus de signe $-$ dans les colonnes u_n et v_n , mais ce sont les mêmes nombres en valeur absolue.

Et cette fois, on a :



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	\times	1077	1	0
1	6	173	0	1
2	4	39	1	6
3	2	17	4	25
4	3	5	9	56
5	2	2	31	193
6	2	1	71	442
7	\times	0	173	1077

$$1077 \times 1 - 173 \times 0 = 1077$$

$$1077 \times 0 - 173 \times 1 = -173$$

$$1077 \times 1 - 173 \times 6 = 39$$

$$1077 \times 4 - 173 \times 25 = -17$$

$$1077 \times 9 - 173 \times 56 = 5$$

$$1077 \times 31 - 173 \times 193 = -2$$

$$1077 \times 71 - 173 \times 442 = 1$$

$$1077 \times 173 - 173 \times 1077 = 0$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Avantages de mettre des $+$: il devient évident que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes à partir du rang 2.



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

On montre (par récurrence double) que dans le cas général, on a, à toute étape k :

$$au_k - bv_k = (-1)^k r_k$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

On montre (par récurrence double) que dans le cas général, on a, à toute étape k :

$$au_k - bv_k = (-1)^k r_k$$

Ce qu'on écrit aussi (en divisant par bu_k) :

$$\frac{a}{b} - \frac{v_k}{u_k} = (-1)^k \frac{r_k}{bu_k}$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

$$\frac{a}{b} - \frac{v_k}{u_k} = (-1)^k \frac{r_k}{bu_k}$$

Puisque $r_k \searrow$ et surtout $u_k \nearrow$, l'écart entre les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{v_k}{u_k}$ est décroissant (et vaut 0 à la dernière étape, bien sûr).



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

$$\frac{a}{b} - \frac{v_k}{u_k} = (-1)^k \frac{r_k}{bu_k}$$

Puisque $r_k \searrow$ et surtout $u_k \nearrow$, l'écart entre les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{v_k}{u_k}$ est décroissant (et vaut 0 à la dernière étape, bien sûr).

De plus la différence est alternativement positive et négative.



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

$$\frac{a}{b} - \frac{v_k}{u_k} = (-1)^k \frac{r_k}{bu_k}$$

Puisque $r_k \searrow$ et surtout $u_k \nearrow$, l'écart entre les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{v_k}{u_k}$ est décroissant (et vaut 0 à la dernière étape, bien sûr).

De plus la différence est alternativement positive et négative.

Et si les fractions $\frac{v_k}{u_k}$ n'étaient autres que les réduites R_k ?



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

$$\frac{a}{b} - \frac{v_k}{u_k} = (-1)^k \frac{r_k}{bu_k}$$

Puisque $r_k \searrow$ et surtout $u_k \nearrow$, l'écart entre les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{v_k}{u_k}$ est décroissant (et vaut 0 à la dernière étape, bien sûr).

De plus la différence est alternativement positive et négative.

Et si les fractions $\frac{v_k}{u_k}$ n'étaient autres que les réduites R_k ?

C'est presque ça : on a $\frac{v_k}{u_k} = R_{k-1}$.



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Par exemple, $6 = q_1 = R_1 = \frac{v_2}{u_2}$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	×	1077	1	0
1	6	173	0	1
2	4	39	1	6
3	2	17	4	25
4	3	5	9	56
5	2	2	31	193
6	2	1	71	442
7	×	0	173	1077



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

$$\text{Par exemple, } 6 = q_1 = R_1 = \frac{v_2}{u_2}$$

$$R_2 = [q_1, q_2] = 6 + \frac{1}{4} = \frac{v_3}{u_3} = \frac{25}{4}$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	×	1077	1	0
1	6	173	0	1
2	4	39	1	6
3	2	17	4	25
4	3	5	9	56
5	2	2	31	193
6	2	1	71	442
7	×	0	173	1077



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

$$\text{Par exemple, } 6 = q_1 = R_1 = \frac{v_2}{u_2}$$

$$R_2 = [q_1, q_2] = 6 + \frac{1}{4} = \frac{v_3}{u_3} = \frac{25}{4}$$

$$R_3 = [6, 4, 2] = 6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = 6 + \frac{1}{\frac{9}{2}} = 6 + \frac{2}{9} = \frac{56}{9} = \frac{v_4}{u_4}$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	×	1077	1	0
1	6	173	0	1
2	4	39	1	6
3	2	17	4	25
4	3	5	9	56
5	2	2	31	193
6	2	1	71	442
7	×	0	173	1077



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

$$\text{Par exemple, } 6 = q_1 = R_1 = \frac{v_2}{u_2}$$

$$R_2 = [q_1, q_2] = 6 + \frac{1}{4} = \frac{v_3}{u_3} = \frac{25}{4}$$

$$R_3 = [6, 4, 2] = 6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = 6 + \frac{1}{\frac{9}{2}} = 6 + \frac{2}{9} = \frac{56}{9} = \frac{v_4}{u_4}$$

$$R_4 = [6, 4, 2, 3] = 6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \dots = \frac{193}{31} = \frac{v_5}{u_5}$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

La démonstration, un tout petit peu délicate, se fait en montrant par récurrence sur p le lemme suivant :

$$\forall y > 0, [q_0; q_1, \dots, q_{p-1}, y] = \frac{yv_p + v_{p-1}}{yu_p + u_{p-1}}$$



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

La démonstration, un tout petit peu délicate, se fait en montrant par récurrence sur p le lemme suivant :

$$\forall y > 0, [q_0; q_1, \dots, q_{p-1}, y] = \frac{yv_p + v_{p-1}}{yu_p + u_{p-1}}$$

Donc l'algorithme d'Euclide étendu (variante) permet de calculer les réduites, et prouve que



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

La démonstration, un tout petit peu délicate, se fait en montrant par récurrence sur p le lemme suivant :

$$\forall y > 0, [q_0; q_1, \dots, q_{p-1}, y] = \frac{yv_p + v_{p-1}}{yu_p + u_{p-1}}$$

Donc l'algorithme d'Euclide étendu (variante) permet de calculer les réduites, et prouve que

- Les réduites sont de plus en plus proches de $\frac{a}{b}$
- Elles sont alternativement plus grandes et plus petites que



Algorithme d'Euclide étendu (variante)

Compléments : on montre que

- $u_i v_{i+1} - u_{i+1} v_i = (-1)^i$
- donc les suites (u_i) et (v_i) sont les dénominateurs et numérateurs des réduites écrites sous forme *irréductible*.
- L'algorithme d'Euclide étendu (variante) permet donc aussi, anecdotiquement, de simplifier la fraction $\frac{a}{b}$.



Pour un nombre irrationnel

Pour un nombre rationnel, l'algorithme d'Euclide se termine toujours, et donc la fraction continue qui représente $\frac{a}{b}$ est *finie*.
Pour un nombre irrationnel x , on peut appliquer aussi l'algorithme d'Euclide étendu (variante), en commençant par $r_0 = x$ et $r_1 = 1$.
Mais ce procédé est nécessairement *infini*



Exemple de π

L'algorithme est le suivant :

- Initialisation, $r_0 = x$, $r_1 = 1$; $u_0 = 1$, $u_1 = 0$; $v_0 = 0$, $v_1 = 1$;
 $q_1 = \lfloor x \rfloor$



Exemple de π

L'algorithme est le suivant :

- Initialisation, $r_0 = x$, $r_1 = 1$; $u_0 = 1$, $u_1 = 0$; $v_0 = 0$, $v_1 = 1$;
 $q_1 = \lfloor x \rfloor$

- Calculs pour $i \geq 1$:

$$r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i; u_{i+1} = q_i u_i + u_{i-1}; v_{i+1} = q_i v_i + v_{i-1};$$

$$q_{i+1} = \left\lfloor \frac{r_i}{r_{i+1}} \right\rfloor.$$



Exemple de π

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	\times	3, 14159265358979	1	0
1	3	1	0	1
2	7	0, 141592653589793	1	3
3	15	0, 00885142487144819	7	22
4	1	0, 0088212805180703	106	333
5	292	0, 0000301443533778922	113	355
6	1	0, 0000191293317257646	33102	103993
7	1	0, 0000110150216521276	33215	104348



Pour un nombre irrationnel

Les résultats pour les nombres rationnels restent valables pour les irrationnels :

- Les quotients $\frac{v_i}{u_i}$ donnent les réduites R_{i-1} ,
- Les réduites convergent vers x , comme des suites alternées, en encadrant x à chaque étape.
- La différence de deux réduites consécutives vaut

$$\frac{v_i}{u_i} - \frac{v_{i+1}}{u_{i+1}} = \frac{v_i u_{i+1} - v_{i+1} u_i}{u_i u_{i+1}} = \frac{(-1)^i}{u_i u_{i+1}}$$



Pour un nombre irrationnel

Les résultats pour les nombres rationnels restent valables pour les irrationnels :

- Les quotients $\frac{v_i}{u_i}$ donnent les réduites R_{i-1} ,
- Les réduites convergent vers x , comme des suites alternées, en encadrant x à chaque étape.
- La différence de deux réduites consécutives vaut

$$\frac{v_i}{u_i} - \frac{v_{i+1}}{u_{i+1}} = \frac{v_i u_{i+1} - v_{i+1} u_i}{u_i u_{i+1}} = \frac{(-1)^i}{u_i u_{i+1}}$$

Comme $u_{i+1} = u_i q_i + u_{i-1} \geq u_i q_i$, on a $\left| \frac{v_i}{u_i} - x \right| \leq \frac{1}{u_i^2 q_i}$.



Pour un nombre irrationnel

Les résultats pour les nombres rationnels restent valables pour les irrationnels :

- Les quotients $\frac{v_i}{u_i}$ donnent les réduites R_{i-1} ,
- Les réduites convergent vers x , comme des suites alternées, en encadrant x à chaque étape.
- La différence de deux réduites consécutives vaut

$$\frac{v_i}{u_i} - \frac{v_{i+1}}{u_{i+1}} = \frac{v_i u_{i+1} - v_{i+1} u_i}{u_i u_{i+1}} = \frac{(-1)^i}{u_i u_{i+1}}$$

Comme $u_{i+1} = u_i q_i + u_{i-1} \geq u_i q_i$, on a $\left| \frac{v_i}{u_i} - x \right| \leq \frac{1}{u_i^2 q_i}$.

Lorsqu'un des quotients q_i est grand, la réduite précédente $R_{i-1} = \frac{v_i}{u_i}$ est très proche de x et les termes suivants u_{i+1} et v_{i+1} sont beaucoup plus grands que les précédents.



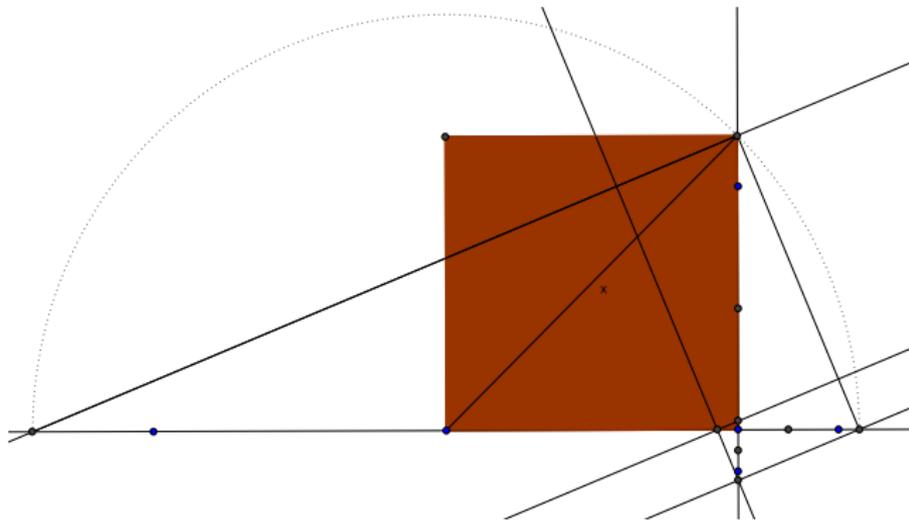
Exemple de π

i	q_i	r_i	u_i	v_i
0	\times	3, 14159265358979	1	0
1	3	1	0	1
2	7	0, 141592653589793	1	3
3	15	0, 00885142487144819	7	22
4	1	0, 0088212805180703	106	333
5	292	0, 0000301443533778922	113	355
6	1	0, 0000191293317257646	33102	103993
7	1	0, 0000110150216521276	33215	104348



La diagonale du carré

Cette figure prouve que $x = \sqrt{2}$ est irrationnel.



La diagonale du carré

Si x est la longueur de la diagonale du carré de côté 1, on voit sur la figure que $\frac{x+1}{1} = \frac{1}{x-1}$ donc

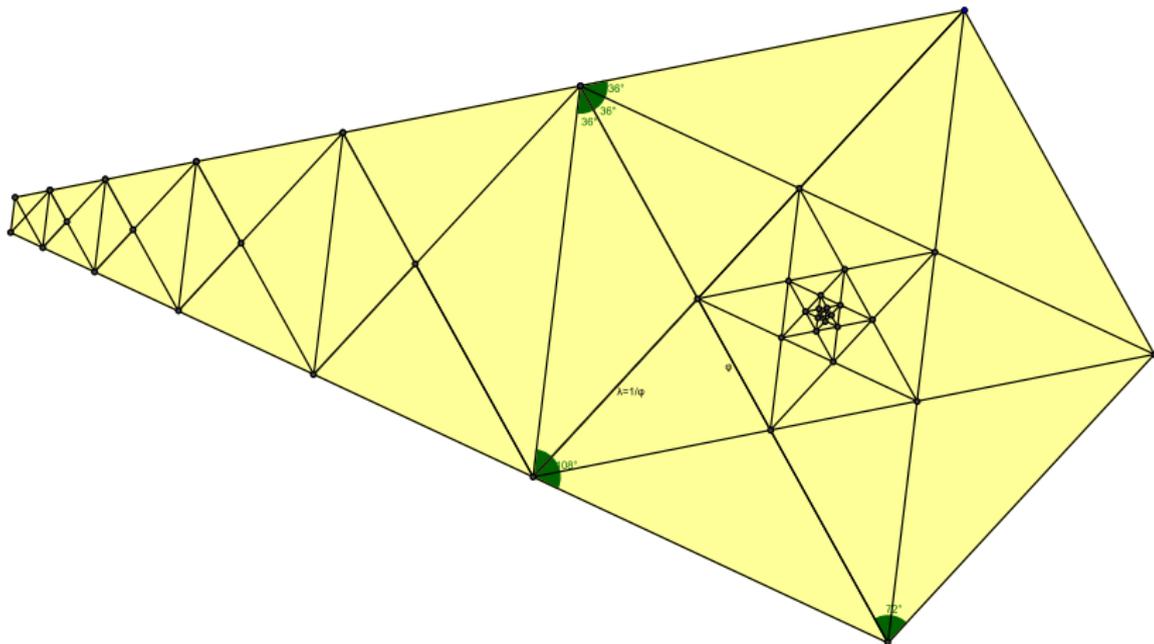
$x+1 = 2 + (x-1) = 2 + \frac{1}{x+1}$ et en remplaçant à l'infini le $x+1$ du dénominateur par cette expression, on trouve le développement en fraction continue :

$x+1 = [2; 2, 2, 2, 2, \dots, 2, 2, \dots]$. Les premières réduites de $x+1$ sont $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70} \dots$



Le pentagone régulier et le nombre d'or

Celle-ci prouve que $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est irrationnel.



Le pentagone régulier et le nombre d'or

Soit ϕ le rapport entre la diagonale et le côté d'un pentagone régulier.

On voit sur la figure que $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$, donc $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, et à nouveau, en remplaçant à l'infini le ϕ du dénominateur par cette expression, on obtient que

$$\phi = [1; 1, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots]$$

Les numérateurs et dénominateurs des réduites sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci : $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots$



Généralités

Les phénomènes astronomiques sont en général, en première approximation, périodiques.

Les fractions continues servent à prévoir les conjonctions, les alignements etc.



Généralités

Soient deux phénomènes astronomiques périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 . A priori $x = \frac{T_1}{T_2}$ est un irrationnel, et le développement en fraction continue de x permet de trouver quelles périodicités apparentes ont les coïncidences des deux phénomènes.



Définition d'une année

Une année tropique dure 365,24219052 jours, soit un peu plus de 365 jours.



Définition d'une année

Une année tropique dure 365,24219052 jours, soit un peu plus de 365 jours. Ajouter un jour tous les 4 ans (années bissextiles) ajoute un peu trop de temps, et induit un décalage.



Définition d'une année

Une année tropique dure 365,24219052 jours, soit un peu plus de 365 jours. Ajouter un jour tous les 4 ans (années bissextiles) ajoute un peu trop de temps, et induit un décalage. Donc les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles,



Définition d'une année

Une année tropique dure 365,24219052 jours, soit un peu plus de 365 jours. Ajouter un jour tous les 4 ans (années bissextiles) ajoute un peu trop de temps, et induit un décalage. Donc les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles, sauf les années multiples de 400 (calendrier grégorien).



Définition d'une année

Une année tropique dure 365,24219052 jours, soit un peu plus de 365 jours. Ajouter un jour tous les 4 ans (années bissextiles) ajoute un peu trop de temps, et induit un décalage. Donc les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles, sauf les années multiples de 400 (calendrier grégorien).

La durée d'une année grégorienne est donc, en moyenne, de

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425 \text{ jours.}$$


Définition d'une année

Une année tropique dure 365,24219052 jours, soit un peu plus de 365 jours. Ajouter un jour tous les 4 ans (années bissextiles) ajoute un peu trop de temps, et induit un décalage. Donc les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles, sauf les années multiples de 400 (calendrier grégorien).

La durée d'une année grégorienne est donc, en moyenne, de

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425 \text{ jours.}$$

Cela induit un décalage de

$365,2425 - 365,24219052 = 0,00030948$ jours par an,



Définition d'une année

Une année tropique dure 365,24219052 jours, soit un peu plus de 365 jours. Ajouter un jour tous les 4 ans (années bissextiles) ajoute un peu trop de temps, et induit un décalage. Donc les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles, sauf les années multiples de 400 (calendrier grégorien).

La durée d'une année grégorienne est donc, en moyenne, de

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425 \text{ jours.}$$

Cela induit un décalage de

$365,2425 - 365,24219052 = 0,00030948$ jours par an, donc il y aura un décalage d'un jour complet au bout de

$$\frac{1}{0,00030948} \simeq 3231 \text{ ans}$$



Définition d'une année

Le développement en fraction continue de $x = 365,24219052$ permet de proposer une amélioration simple et remarquablement efficace de ce calendrier (qui ne sera jamais adoptée, hélas !)



Définition d'une année

À l'aide d'un logiciel approprié (par exemple une feuille de calcul),
on trouve le développement en fraction continue :

$$x = 365,24219052 = [365; 4, 7, 1, 3, 19, 1 \dots]$$


Définition d'une année

À l'aide d'un logiciel approprié (par exemple une feuille de calcul),
on trouve le développement en fraction continue :

$$x = 365,24219052 = [365; 4, 7, 1, 3, 19, 1 \dots]$$

Les premières réduites sont

$$R_1 = 365, R_2 = \frac{1461}{4}, R_3 = \frac{10592}{29}, R_4 = \frac{12053}{33} \text{ et } R_5 = \frac{46751}{128}$$



Définition d'une année

À l'aide d'un logiciel approprié (par exemple une feuille de calcul), on trouve le développement en fraction continue :

$$x = 365,24219052 = [365; 4, 7, 1, 3, 19, 1 \dots]$$

Les premières réduites sont

$$R_1 = 365, R_2 = \frac{1461}{4}, R_3 = \frac{10592}{29}, R_4 = \frac{12053}{33} \text{ et } R_5 = \frac{46751}{128}$$

À cause de la présence de $q_6 = 19$ dans le développement, on est sûr que R_5 est une très bonne approximation de x , bien meilleure que R_4 .



Définition d'une année

À l'aide d'un logiciel approprié (par exemple une feuille de calcul), on trouve le développement en fraction continue :

$$x = 365,24219052 = [365; 4, 7, 1, 3, 19, 1 \dots]$$

Les premières réduites sont

$$R_1 = 365, R_2 = \frac{1461}{4}, R_3 = \frac{10592}{29}, R_4 = \frac{12053}{33} \text{ et } R_5 = \frac{46751}{128}$$

À cause de la présence de $q_6 = 19$ dans le développement, on est sûr que R_5 est une très bonne approximation de x , bien meilleure que R_4 .

En plus le dénominateur 128 est « sympathique ».



Définition d'une année

Écrivons R_5 un peu « à l'égyptienne » :

$$R_5 = \frac{46751}{128} = 365 + \frac{31}{128} = 365 + \frac{32}{128} - \frac{1}{128} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128}$$

Il suffirait donc de supprimer une année bissextile non pas tous les 100 ans, mais tous les 128 ans pour avoir une stabilité exceptionnelle :



Définition d'une année

Écrivons R_5 un peu « à l'égyptienne » :

$$R_5 = \frac{46751}{128} = 365 + \frac{31}{128} = 365 + \frac{32}{128} - \frac{1}{128} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128}$$

Il suffirait donc de supprimer une année bissextile non pas tous les 100 ans, mais tous les 128 ans pour avoir une stabilité exceptionnelle :

$x - R_5 = 365,24219052 - \frac{46751}{128} \simeq 0,00000302$ et on aurait donc un jour de perdu tous les

$$\frac{1}{x - R_5} \simeq 331125 \text{ans} !$$



L'automate de Huygens

L'autre exemple classique est celui de l'automate de Huygens qui simule le système solaire. Le problème est de trouver comment relier la Terre et Saturne dont les durées de révolutions T_1 et T_2 qui sont dans un rapport de $\rho = 29,4254485$.



L'automate de Huygens

L'autre exemple classique est celui de l'automate de Huygens qui simule le système solaire. Le problème est de trouver comment relier la Terre et Saturne dont les durées de révolutions T_1 et T_2 qui sont dans un rapport de $\rho = 29,4254485$.

Comment Huygens a-t-il réalisé un système mécanique (engrenage) pour modéliser de façon approchée ce rapport ?



L'automate de Huygens

Le développement en fraction continue de ρ est
 $\rho = [29; 2, 2, 1, 5, 1, 4, \dots]$; les premières réduites sont $R_1 = 29$,
 $R_2 = \frac{59}{2}$, $R_3 = \frac{147}{5}$, $R_4 = \frac{206}{7}$;



L'automate de Huygens

Le développement en fraction continue de ρ est

$\rho = [29; 2, 2, 1, 5, 1, 4, \dots]$; les premières réduites sont $R_1 = 29$,
 $R_2 = \frac{59}{2}$, $R_3 = \frac{147}{5}$, $R_4 = \frac{206}{7}$;

La présence du quotient $q_5 = 5$ relativement grand justifie qu'Huygens ait choisi R_4 , avec un engrenage d'une roue à 206 dents contre une roue à 7 dents. La réduite suivante a des numérateurs et dénominateurs beaucoup plus grands (à cause du 5, justement) : $R_5 = \frac{1177}{40}$ ne convient pas car ce serait trop difficile de réaliser de réaliser une roue dentée à 1177 dents.



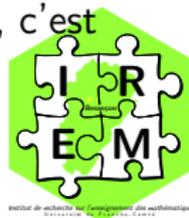
Mauvaises approximations rationnelles

Dans un développement en fraction continue d'un nombre x , plus les quotients q_i sont grands, et plus réduites correspondantes R_{i-1} sont de bonnes approximations x .

Mais les plantes souhaitent au contraire trouver un nombre qui soit difficile à approcher par des rationnels, cela leur permet que leurs graines, leurs feuilles, occupent mieux l'espace.

Le nombre qui est le plus mal approché par ses réduites, c'est le nombre dont tous les quotients valent 1, on l'a déjà rencontré, c'est

le nombre d'or $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

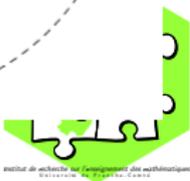
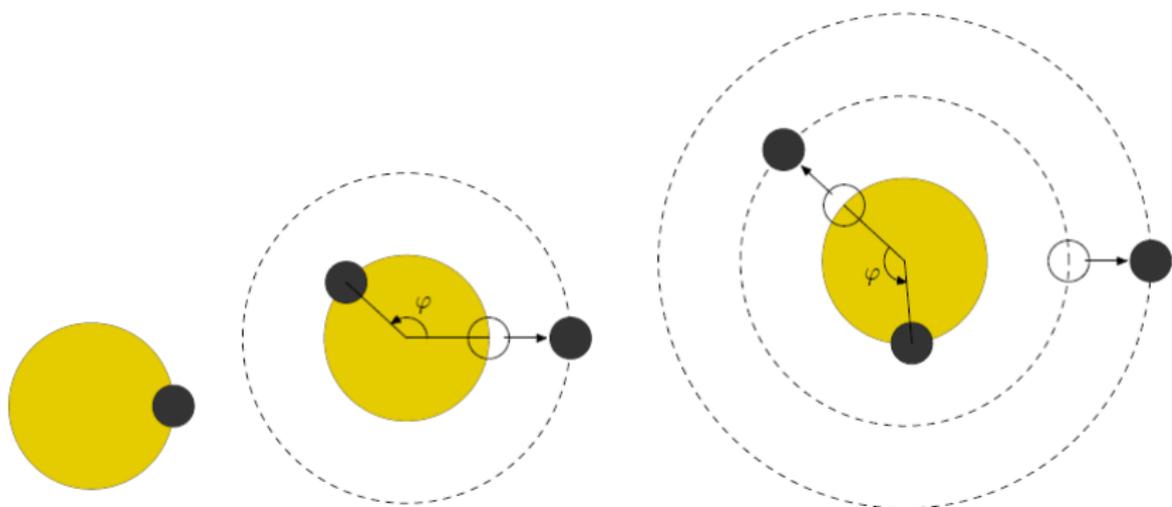


L'angle d'or

Forte de cette propriété, quand une plante doit faire pousser successivement deux graines à partir d'une zone centrale, elle les sépare d'un angle qui est dans un rapport ϕ avec les 360° d'un tour complet. C'est l'angle d'or, qui mesure $\frac{360}{\phi} \simeq 222,492235949962$; comme on s'intéresse un angle géométrique, entre 0 et 180° , l'angle d'or est $360 - 222,492235949962 = 137,507764050038^\circ$



L'angle d'or



Spirales

Du coup, lorsqu'on compte les spirales d'une plante, on trouve toujours un nombre de spirales de la suite de Fibonacci, 3,5,8,13,21,34, ou même 55



Spirales



Spirales



Institut de recherche en Électronique et Mathématiques
UMR 5175 - IREM
www.irem.fr

Il y a pas mal de travail pour comprendre exactement le phénomène, mais une chose est sûre, la présence du nombre 710 presque systématique dans les différences est liée au développement en fraction continue de 2π .



Il y a pas mal de travail pour comprendre exactement le phénomène, mais une chose est sûre, la présence du nombre 710 presque systématique dans les différences est liée au développement en fraction continue de 2π .

$$2\pi = [6; 3, 1, 1, 7, 2, 146, 3, \dots]$$



Il y a pas mal de travail pour comprendre exactement le phénomène, mais une chose est sûre, la présence du nombre 710 presque systématique dans les différences est liée au développement en fraction continue de 2π .

$$2\pi = [6; 3, 1, 1, 7, 2, 146, 3, \dots]$$

Les premières réduites de 2π sont

$$R_1 = \frac{6}{1}, R_2 = \frac{19}{3}, R_3 = \frac{25}{4}, R_4 = \frac{44}{7};$$



Il y a pas mal de travail pour comprendre exactement le phénomène, mais une chose est sûre, la présence du nombre 710 presque systématique dans les différences est liée au développement en fraction continue de 2π .

$$2\pi = [6; 3, 1, 1, 7, 2, 146, 3, \dots]$$

Les premières réduites de 2π sont

$$R_1 = \frac{6}{1}, R_2 = \frac{19}{3}, R_3 = \frac{25}{4}, R_4 = \frac{44}{7};$$

(Comme $q_5 = 7$ est assez grand, cette réduite est une bonne approximation de 2π , et donc le numérateur 44 arrive souvent dans les différences)



Il y a pas mal de travail pour comprendre exactement le phénomène, mais une chose est sûre, la présence du nombre 710 presque systématique dans les différences est liée au développement en fraction continue de 2π .

$$2\pi = [6; 3, 1, 1, 7, 2, 146, 3, \dots]$$

Les premières réduites de 2π sont

$$R_1 = \frac{6}{1}, R_2 = \frac{19}{3}, R_3 = \frac{25}{4}, R_4 = \frac{44}{7};$$

(Comme $q_5 = 7$ est assez grand, cette réduite est une bonne approximation de 2π , et donc le numérateur 44 arrive souvent dans les différences)

$$R_5 = \frac{333}{53}, R_6 = \frac{710}{113};$$



Il y a pas mal de travail pour comprendre exactement le phénomène, mais une chose est sûre, la présence du nombre 710 presque systématique dans les différences est liée au développement en fraction continue de 2π .

$$2\pi = [6; 3, 1, 1, 7, 2, 146, 3, \dots]$$

Les premières réduites de 2π sont

$$R_1 = \frac{6}{1}, R_2 = \frac{19}{3}, R_3 = \frac{25}{4}, R_4 = \frac{44}{7};$$

(Comme $q_5 = 7$ est assez grand, cette réduite est une bonne approximation de 2π , et donc le numérateur 44 arrive souvent dans les différences)

$R_5 = \frac{333}{53}, R_6 = \frac{710}{113}$; à cause du septième quotient $q_7 = 146$, cette fraction est une approximation extraordinairement précise de 2π et c'est pour cela que 710 apparaît presque toujours...



Merci de votre attention

