# 4. Les suites

### 4.1. Suites définies fonctionnellement : $u_n = f(n)$

Une façon de les représenter graphiquement :

- créer la fonction f(x), puis *la cacher*
- créer un curseur n à valeurs entières (soit : min 1, max : ce qu'on veut, pas : 1)
- créer la séquence de points : Séquence[(k,f(k)),k,1,n] (ou Séquence[(k,f(k)),k,0,n], selon que la suite admet ou non un terme de rang 0)

La manipulation du curseur permet de faire apparaître les points un par un. Voir fichier GeoGebra "Suite fonctionnelle"

Si une limite est conjecturée, on peut faire apparaître le "tuyau" [$\ell$-ε, $\ell$+ε] comme dans le cas des fonctions.

### 4.2. Suites récurrentes $u_n = f(u_{n-1})$ : représentation cartésienne.

Il y a plusieurs façons d'obtenir cette représentation :

a) avec un "*Outil créé par l'utilisateur*" (ou macro) (voir fichier GeoGebra : suites récurrentes-cartésien1)

- on crée la fonction f, on la cache ;
- on crée un curseur $u_0$ qui déterminera le premier terme
- on crée le point A=(0, $u_0$)
- on crée le point B=(x(A)+1,f(y(A)))
- on clique sur *Outils*, *Créer un nouvel outil,* on choisit pour objet final : B, pour objets initiaux A et f ; on donne un nom à cet outil, par exemple "Récur"

*Rq : cet outil fait maintenant partie de la liste des commandes, pour ce fichier GeoGebra ; si on veut pouvoir l'utiliser dans d'autres fichiers, on a intérêt à l'enregistrer dans un dossier "Outils" spécialement créé.*

- on applique cet outil à B, puis au point obtenu, etc : les points représentant la suite apparaissent l'un après l'autre.

Si on veut accélérer l'apparition des points, on peut créer un deuxième outil "Récur10fois" (ou 20 fois…) en prenant comme objets initiaux A et f, objets finaux les 10 premiers points obtenus : en appliquant cet objet au dernier point, on en obtiendra 10 de plus, etc…

b) Avec la commande *ItérationListe* (voir fichier GeoGebra " suites récurrentes-cartésien2"

Cette commande est spécialement destinée à créer la liste des premiers termes d'une suite récurrente. Pour l'utiliser "confortablement", je préconise de :

- créer la fonction f, et la cacher ;
- créer 2 curseurs $u_0$ (premier terme) et n (nombre de termes)
- taper L=ItérationListe[f,u_0,n] : la liste L des n premiers termes apparaît dans la fenêtre algèbre
- pour avoir une représentation graphique, créer la liste de points suivante :

L1 = Séquence[(k,Elément[L,k]),k,1,n]

Comme en 3.1., on peut faire apparaître le "tuyau" [$\ell$-ε, $\ell$+ε] ; sur l'exemple que j'ai choisi, la manipulation du curseur $u_0$ montre clairement que la limite ne dépend pas du premier terme.

**4.3. Suites récurrentes $u_n = f(u_{n-1})$ : représentation "en escargot".** (voir fichier GeoGebra "suites récurrentes-escargot")
Comme précédemment, il faut créer les curseurs $u_0$ et n, la fonction f (mais cette fois on laissera visible sa représentation graphique), et la liste de valeurs L=ItérationListe[f,u_0,n]. On crée aussi la droite Δ d'équation y=x.
La liste L1=Séquence[(Elément[L, i], Elément[L, i + 1]), i, 1, n] donnera tous les points de coordonnées ($u_i$, $u_{i+1}$), sur la courbe de f;
L2= Séquence[(Elément[L, i], Elément[L, i]), i, 1, n] fournit les points de coordonnées ($u_i$, $u_i$) sur Δ ;
enfin L3=Séquence[Segment[Elément[L2, i], Elément[L1, i]], i, 1, n] et L4=Séquence[Segment[Elément[L2, i], Elément[L1, i - 1]], i, 2, n] traceront les segments utiles.
*Je ne pense pas utile de faire réaliser un tel fichier par les élèves eux-mêmes : c'est prendre trop de temps sur les activités proprement mathématiques. Par contre, le leur montrer au vidéo-projecteur (ou le leur fournir sur un réseau), prendre quelques minutes pour étudier visuellement les effets d'un changement de $u_0$, recommencer en redéfinissant f plusieurs fois, etc, favorise indubitablement l'appropriation du phénomène. On commencera par régler n sur 1, puis on avancera étape par étape. Dans le cas de convergence, lorsque les points ne se distinguent plus les uns des autres, on fera un fort zoom, et on continuera, quitte à changer le maximum de n (clic droit, propriétés, curseur).*

**4.4. Suites récurrentes d'ordre 2 : $u_n=f(u_{n-1},u_{n-2})$** (Voir fichier GeoGebra "suite récurrente Ordre 2")
Ici la commande Itération ne convient pas ; on va s'en tirer en créant un Outil.
$u_0$ et $u_1$ seront pilotés par deux curseurs. On créera les points A(0,$u_0$) et B(1,$u_1$)
Prenons pour exemple la suite définie par $u_n = \frac{2u_{n-2} + u_{n-1}}{3}$ : on crée le point C de coordonnées (x(B)+1,(2*y(A)+y(B))/3). Puis on clique sur Outils, Créer un nouvel outil; on choisit comme objet final le point C, comme objets initiaux les points A et B (ne pas oublier d'ôter des objets initiaux les nombres $u_0$ et $u_1$, que le logiciel propose par défaut). Cet outil, appliqué aux deux derniers points, fournit le point suivant, avec, dans la fenêtre Algèbre, ses coordonnées, c'est-à-dire le numéro et la valeur (décimale approchée) du terme suivant de la suite.
*Attention, pour changer d'expression pour $u_n$, il ne suffit pas de redéfinir C ; il faut de plus effacer l'outil RécurOrdre2, et le recréer*

**4.5. Suites mixtes : $u_n=f(u_{n-1},n)$** (Voir fichier GeoGebra "Suite Mixte")
Comme dans le cas précédent on utilisera un Outil. $u_1$ étant piloté par un curseur, A(0,$u_1$) , si par exemple on a $u_n = u_{n-1} \times \ln(n)$ , on créera B de coordonnées (x(A)+1,y(A)*ln(x(A)+1), puis l'outil ayant comme objet final B, objet initial A.
*Attention, pour changer d'expression pour $u_n$, il ne suffit pas de redéfinir B; il faut de plus effacer l'outil RécurMixte, et le recréer*