8. Equations différentielles.

Tout aussi bien qu'un tableur, *GeoGebra* permet de construire des solutions approchées d'équations différentielles par la méthode d'Euler.
Rappelons que cette méthode consiste à appliquer de façon itérée l'approximation $g(x+h) \approx g(x) + hg'(x)$, pour h "petit".

8.1. Equation du 1er ordre : y'=f(y) (voir fichier *GeoGebra* EquaDiffOrdre1-LaRochelle).
Créer un curseur h (valeurs de 0 à 1, pas 0,01 par exemple).
Créer la fonction f: si l'équation étudiée est, par exemple, y'=3y+2, il faudra taper f(x)= 3x+2 ; cacher la représentation graphique de f, qui est inutile et pourrait perturber la compréhension des élèves.
Créer un point libre A : ses coordonnées définiront la condition initiale : $y(x_0)=y_0$ se traduit par : A a pour coordonnées (x_0,y_0).
Le premier point créé par la méthode d'Euler a pour coordonnées $(x(A)+h,\ h\times y'(x(A)))$, avec y'(x(A)) = f(y(A)) ; on tapera donc d'abord y'=f(y(A)), puis B=A+(h,h*y').
On crée alors l'outil EquaDiffOrdre1 : objets finaux y' et B; objets initiaux h, A, f.
On applique cet outil en cliquant sur h, B, f : on obtient le point suivant ; etc
Remarque: on peut aussi définir directement y' par son expression en fonction de y donnée par l'équation étudiée ; avantage : 2 clics au lieu de 3 à chaque usage de l'outil ; inconvénient : moins de clarté lorsqu'on veut changer de fonction f pour étudier une nouvelle équation.
Pour avoir des points à gauche de A, on peut définir h_1=-h, et appliquer l'outil en cliquant sur h_1 au lieu de h.
Pour obtenir plus rapidement un grand nombre de points, on peut : appliquer l'outil EquaDiffOrdre1 10 fois avec h; créer un nouvel outil EqDiffGlobalDroite avec pour objets finaux les 10 points créés, objets initiaux h, A, f. Procéder de même avec -h.

8.2. Equation du 2ème ordre : y"=f(y) (voir fichier *GeoGebra* EquaDiff y"=f(y)-Euler)
Le principe est le même, mais il faut ici *deux* conditions initiales : $y(x_0)=y_0$, donnée par le point A comme précédemment, et la valeur de $y'(x_0)$, qui peut être pilotée par un curseur que j'ai appelé yprim0. La détermination du premier point se fait en deux temps :
a) $y'=y'(x_0)+hy''(x_0)$, soit à taper : y'= yprim0+f(y_0)*h
b) $Y_1=y_0+h*y'$; $B=(x_0+h,y_1)$
On crée alors l'Outil Eqy"=y avec comme objet final le point B et le nombre y', objets initiaux A,f,h,yprim0 ; on l'applique à B,f,h,y', puis à C,f,h,a (a étant le nombre obtenu à l'étape précédente).
Comme dans 4.1 on peut créer un autre outil résultat de l'application répétée 10 fois (par exemple) de l'outil précédent.

Pour les deux fichiers précédents : je pense souhaitable de les faire fonctionner d'abord avec une équation facilement résoluble, comme y'= 3y dans 4.1., y"=-y dans 4.2. Ayant constaté de visu la superposition approximative des points obtenus avec la *représentation de la solution, on pourra alors les appliquer à des cas plus délicats, en ayant pris conscience de leurs limites.*

8.3. Equation avec second membre : y'=f(y,x) (Ici on ne pourra pas redéfinir la fonction f : à chaque nouvelle équation correspondra un nouveau fichier GeoGebra. Sur le fichier GeoGebra EquaDiff y'=f(y,x) j'ai pris comme exemple l'équation $y' = yx$
Le point A donne les conditions initiales, le curseur h donne le pas. On tape y'=y(A)*x(A), puis B=A+(h,y'*h) ; on crée un outil : objet final : B, objets initiaux : A et h; on l'applique à B et h, puis à C et h, etc; pour avoir des points à gauche de A, on applique l'outil à A et –h, etc.

L'exemple choisi permet une vérification : sous la forme $\frac{y'}{y} = x$, l'équation donne $\ln(y) = \frac{x^2}{2} + C$, d'où $y = \exp(\frac{x^2}{2} + C)$, en plaçant A en (0,1), on a C=0 ; on crée la fonction g, $g(x) = \exp(\frac{x^2}{2} + C)$, on vérifie que, pour h petit, les points obtenus sont proches de la courbe de g.

8. Equation à variables séparées : f(y).y' = g(x).
Rappelons que ce type d'équation se résout en égalant les primitives de f et g :
F(y) = G(x) + C, puis, sur chaque intervalle où F est bijective, en écrivant : y = F^{-1}(G(x)+C)
Sous réserve que f et g soient "classiques", GeoGebra donnera sans mal F et G (voir 7) ; mais F^{-1} n'étant pas reconnue comme fonction (voir 5), obtenir la représentation graphique de F^{-1}oG m'a un peu fait transpirer. Voici ce que j'ai fini par trouver (fichier Var separ) :

- créer f et g ; j'ai pris comme exemple l'équation $-\frac{y'}{y^2} = e^x$, qui offre l'avantage d'être explicitement résoluble, et donc de permettre une vérification ; on tape donc $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \exp(x)$. Cacher f et g, dont les courbes ne serviront pas.
- demander les primitives : intégrale[f] et intégrale[g], que l'on renomme respectivement F et G ; on obtient $F(x) = \frac{1}{x}$, $G(x) = e^x$
- créer un curseur C qui permettra d'ajuster la constante pour tenir compte de la condition initiale ; créer G_1 en tapant G_1(x)=G(x)+C. Cacher G et G_1, dont les courbes ne serviront pas.
- créer A et B points libres sur (Ox), le segment [AB], M point libre sur[AB] ([AB] est l'intervalle sur lequel on résout l'équation; il doit être choisi tel que F y soit monotone et continue)
- créer la droite d'équation y = G_1(x(M)), et le point P intersection de cette droite avec la courbe de F.
- créer la droite Δ d'équation y = x, et P', symétrique de P par rapport à Δ. P' a donc pour coordonnées $\left(G_1(x(M)), F^{-1}(G_1(x(M)))\right)$

- créer Q de coordonnées $\left(x(M), y(P')\right)$
- activer la trace de Q et déplacer M, ou bien créer le lieu de Q par rapport à M : ce lieu est la représentation graphique de la solution de l'équation, correspondant à la condition initiale déterminée par la valeur de C
- *Pour vérification* : créer la fonction h, solution de l'équation obtenue par le calcul : $h(x) = \dfrac{1}{e^x + C}$, avec une couleur différente de celle du lieu de Q : on constatera leur exacte superposition.

Attention, après construction, le déplacement du curseur C, la redéfinition des fonctions f et g conduisent (sur mon ordinateur au moins) à d'assez longs temps de calcul, de l'ordre de la minute. Peut-on éviter cet inconvénient ? Ici aussi je suis preneur de suggestions d'améliorations.