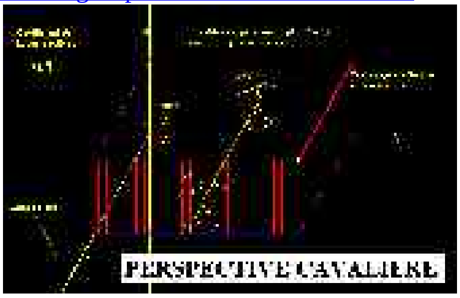
COMPRENDRE ET ENSEIGNER LES PERSPECTIVES CAVALIÈRE ET MILITAIRE AVEC CABRI-GÉOMÈTRE 2 PLUS

Jean-Jacques Dahan I.A.M. de Grenoble
Responsable du groupe de géométrie dynamique de l'IREM de Toulouse
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/index.html

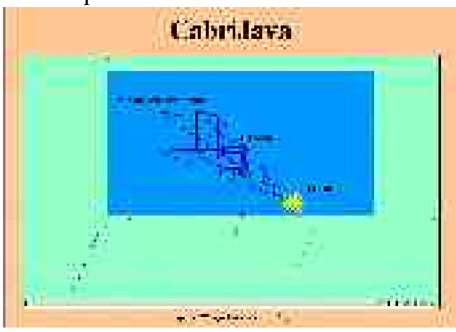


http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/drawingontheblackboardanim.htm

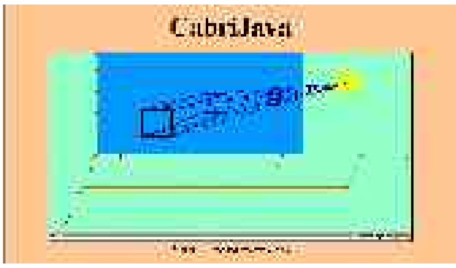
1. APPRÉHENDER LA PERSPECTIVE CAVALIÈRE À PARTIR DE TROIS ANIMATIONS CABRIJAVA

Voici 3 applets (fichiers Cabri qui s'ouvrent automatiquement sur une animation) et qui permettent une introduction rapide de la notion de perspective cavalière avec les élèves.

1ère étape : La première applet qu'on ouvre à l'adresse
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/thepainteraanim.htm
fait apparaître une lampe en mouvement éclairant un cube et l'ombre de ce cube sur un écran bleu. On peut constater que l'ombre ne conserve pas en particulier le parallélisme, le cube est « déformé ». L'ombre du cube, dans ce cas est une perspective centrale ou conique du cube.



2nde étape : Dans cette seconde applet qu'on ouvre à l'adresse
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/thepainterbanim.htm
modélisant encore une perspective centrale, la lumière est positionnée en sorte d'obtenir un éclairage rasant ; on constate encore une déformation au niveau de l'ombre mais ici, il semble difficile au niveau perceptif d'accepter l'ombre visualisée comme celle d'un cube à cause de la forme allongée de cette ombre (causée par l'emplacement de la source lumineuse).

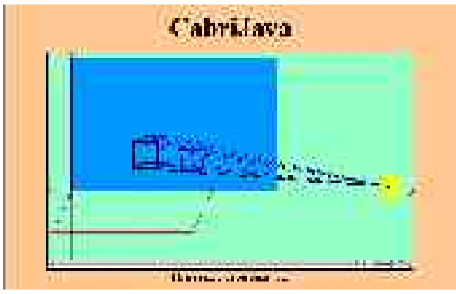


3ième étape : dans la troisième applet qu'on ouvre à l'adresse
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/thepaintercanim.htm
on a éloigné la source lumineuse pour se rapprocher d'une modélisation d'un éclairage provenant de l'infini (comme par exemple l'éclairage du soleil). Dans ce cas les rayons issus de la source lumineuse sont parallèles ou du moins le sont presque dans notre modélisation. On constate ici :

• Que l'ombre du cube conserve les propriétés de parallélisme, on constate aussi

•• Que les faces avant et arrière sont représentées en vraies grandeurs (elles sont donc superposables sur notre écran). Ceci exclut donc que cette ombre puisse modéliser notre vision binoculaire où la face avant est vue plus grande que la face arrière. On constate encore

••• Que les arêtes du cube perpendiculaires au plan de l'écran, sont toutes de mêmes dimensions et portées par des droites ayant la même direction.



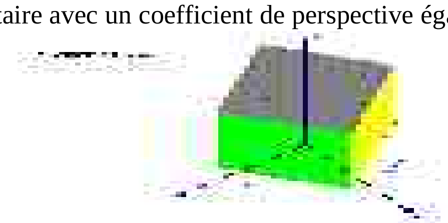
Ces trois constatations conduisent à la mise en évidence des caractéristiques de cette ombre qu'on appelle la perspective cavalière (en France) et la perspective parallèle (dans les pays anglo-saxons). La deuxième dénomination semble mathématiquement plus pertinente car cette ombre n'est autre que l'image d'un cube dans une projection de l'espace suivant une direction donnée.

Ces caractéristiques sont les suivantes :

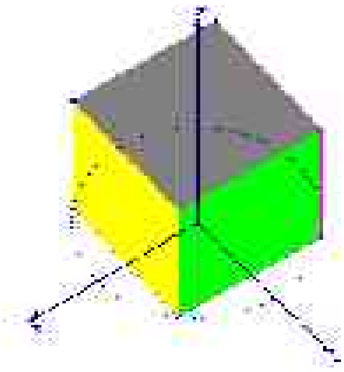
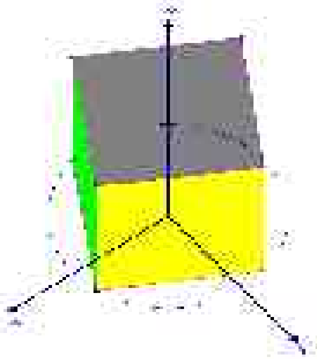
- Tous les points de l'espace sont représentés sur un même plan qui est le plan de la feuille ou de l'écran où un repère est donné pour savoir se positionner dans ce plan. Toutes les figures planes situées dans des plans parallèles à ce plan qu'on appelle le plan frontal sont représentées en vraies dimensions.
- Une droite issue de l'origine symbolise la droite perpendiculaire au plan frontale ; on la nomme la fuyante de la perspective. Toutes les autres perpendiculaires au plan frontal seront représentées parallèles à cette fuyante.
- Les dimensions sur les droites parallèles à la fuyante sont proportionnelles aux vraies dimensions suivant un coefficient de proportionnalité qu'on appelle le coefficient de la perspective. Notons que ce coefficient est un nombre réel positif : il peut donc être supérieur à 1 (cas de l'ombre rasante)

Le fichier montrant Filou dans un plan frontal et son double dans un plan parallèle au plan frontal, présenté en introduction, permet de résumer de manière dynamique ces caractéristiques. L'adresse indiquée sous ce fichier contient une applet animée de ce fichier.

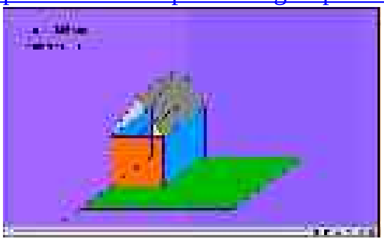
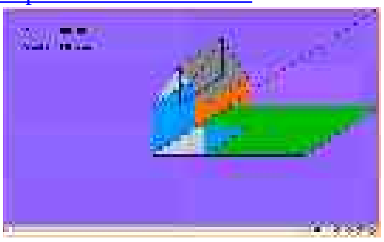
Notons que lorsque le plan frontal est remplacé par le plan horizontal et la fuyante par une verticale représentée par une perpendiculaire à l'horizontale de la feuille de dessin ou de l'écran de l'ordinateur, on parle de perspective militaire (du moins en France). Voici ci-dessous un fichier contenant un cube tournant représenté en perspective militaire avec un coefficient de perspective égal à 0.8:



Quand on fait tourner ce cube autour de son axe vertical, comme cela est fait ci-dessous, on peut constater que nos constructions modélisent bien la réalité de ce qui est vu dans une telle situation au niveau des faces visibles.

Ici les problèmes de gestion des couleurs des faces ont été gérés par les outils de Geneviève Tulloue pour éviter les dysfonctionnement qu'on peut noter au début de la présentation sur la perspective cavalière à l'adresse
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/ppwithcabrids.htm
Ce dysfonctionnement est illustré de manière animée dans l'applet à l'adresse
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/littlefarm.htm

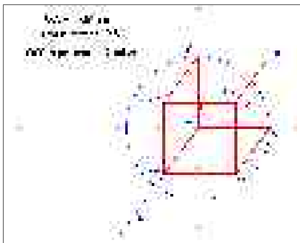
Dans la suite de cet atelier nous montrons comment réaliser cette gestion des faces cachées, lorsque celles-ci sont les faces d'un polyèdre convexe qui sont de forme triangulaires ou de forme quadrilatérales. Cette situation est donc celle qui nous intéresse dans les cas des cubes, pavés, tétraèdres, prismes.

2. REPRÉSENTATIONS USUELLES EN PERSPECTIVE CAVALIÈRE

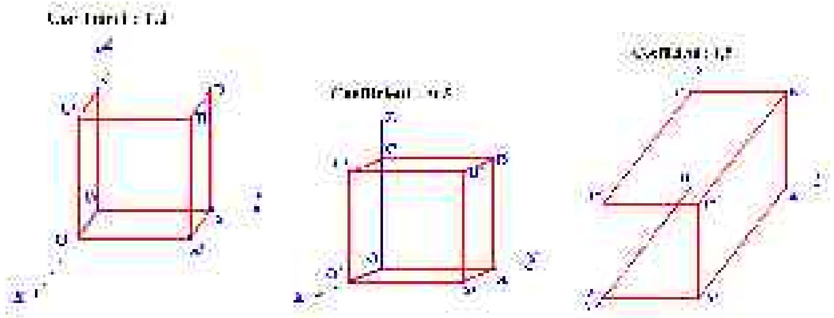
Une introduction à la notion de perspective cavalière est disponible à l'adresse :
http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/ppwithcabrids.htm

2.1. Construction d'un cube

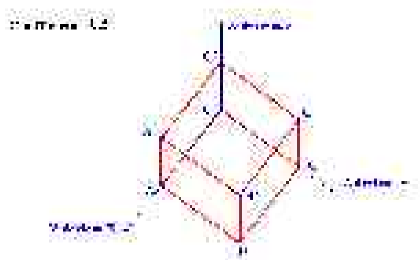
2.1.1. En perspective cavalière

 *CUBEpc.fig*	**Programme de construction** : Demi-droite [Ou[. Cercle de centre O et de rayon OA. Mesure de OA et affichage du coefficient k de la perspective. Milieu I de [AC] puis symétrique B de O par rapport à l'origine. Création du polygone OABC (qui est donc un carré). Calcul de la distance OO' où O' est l'extrémité de l'arête de bout issue de O. Placement de O' par report de mesure. Création du vecteur $\overset{\vee}{OO'}$. Image de OABC par la translation de vecteur $\overset{\vee}{OO'}$. Création des segments [OO'], [AA'], [BB'], et [CC'],

La modification du coefficient de la perspective ou le changement de position de la fuyante génèrent les figures ci-dessous utiliser le fichier précédent *CUBEpc.fig*) :

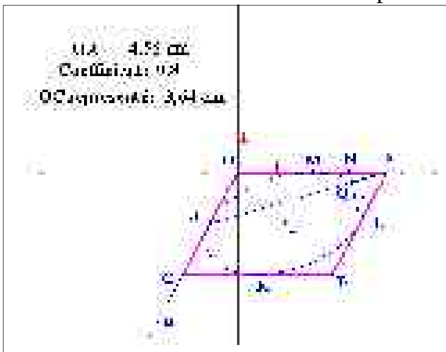


2.1.2. En perspective militaire

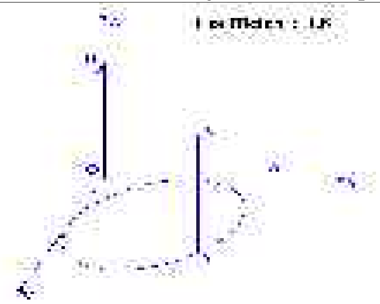
 *CUBEpm.fig*	Si on faut tourner l'axe OY autour de O, le plan frontal de la perspective cavalière devient le plan horizontal de la perspective militaire. Si on redresse la fuyante OX en la faisant tourner autour de O, on obtient la fuyante verticale de la perspective militaire sur laquelle s'applique le coefficient de la dite perspective.

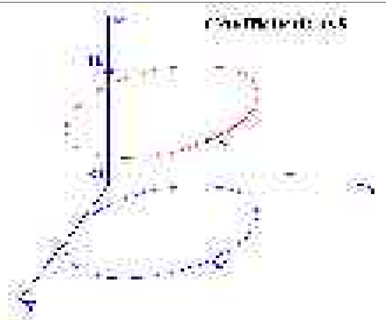
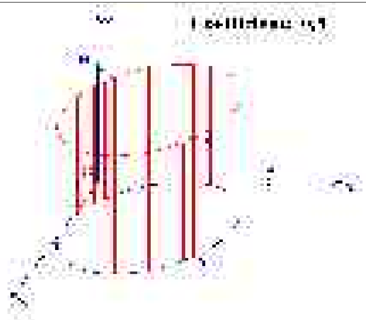
2.2. Constructions de cylindres et prismes

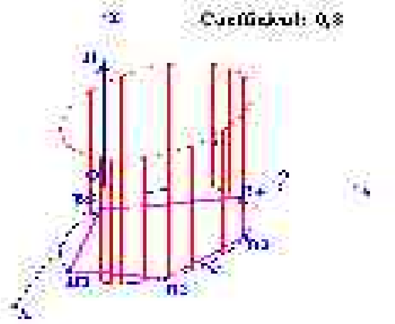
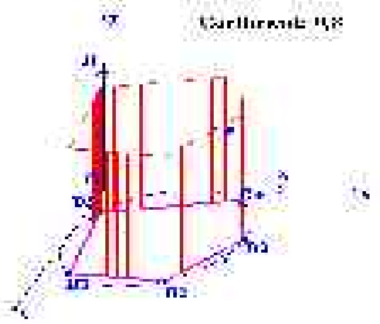
2.2.1. Construction d'un cercle du plan horizontal en perspective cavalière

 *CERCLEpc.fig*	OABC est un parallélogramme représentant un carré du plan horizontal. La représentation du cercle inscrit dans ce carré est obtenue en traçant la conique passant par les 5 points J, K, L, Q et M.

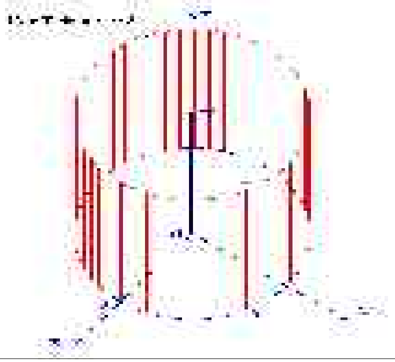
2.2.2. Construction de cylindres et de prismes droits en perspective cavalière

 *CYLINDREpc1.fig*	$\vec{OH}$ est un vecteur porté par l'axe vertical permettant de commander la hauteur du cylindre (en tirant sur H). Une génératrice de notre cylindre est le segment [Vv] où V est un point du cercle de base et v son image par la translation de vecteur $\vec{OH}$.

 La partie supérieure du cylindre est le lieu du point v quand V varie	 Le cylindre est généré par le lieu des segments [Vv] quand V varie.

	
On a tracé ici un polygone inscrit dans le cercle de base	En redéfinissant V sur ce polygone, le cylindre devient un prisme droit

2.2.3. Constructions de cylindres et de prismes verticaux en perspective militaire

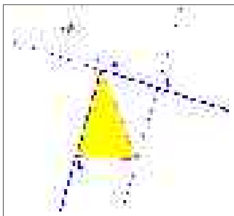
	La technique est la même qu'en perspective cavalière. ⟵ *CYLINDREpm.fig*

3. REPRÉSENTATIONS CONDITIONNELLES DE TRIANGLES ET QUADRILATÈRES

3.1. Introduction

On note A, B et C les sommets d'une face visible triangulaire d'un polyèdre dans une représentation en perspective, A, B et C étant pris dans le sens trigonométrique ou sens direct. Lorsque le polyèdre change de position et que la face qui était visible passe « derrière » cette face visible disparaît. Ceci arrive quand les trois points A, B et C se retrouvent dans une orientation contraire à l'orientation d'origine. Le problème que nous allons traiter est le suivant : quelles constructions réaliser lorsque les trois points A, B et C étant donnés dans le sens direct, le triangle ABC apparaisse et que le triangle disparaisse lorsque les trois points A, B et C se retrouvent dans l'orientation contraire. Nous allons proposer la solution donnée par Geneviève Tulloue.

3.2. Construction d’un triangle visible seulement lorsqu’il est direct

 ***TriangleTulloue1.fig***	On se donne trois points A, B et C dans le sens direct ainsi que le nombre 90. On réalise les constructions suivantes : La demi-droite [AB). L’image de cette demi-droite par la rotation de centre A et d’angle 90° (c’est à dire le nombre affiché). La perpendiculaire issue de C à la précédente demi-droite. Le point H intersection de cette perpendiculaire et de la demi-droite image. La droite issue de H et perpendiculaire à [AB). A’ est le point d’intersection de cette perpendiculaire avec [AB).

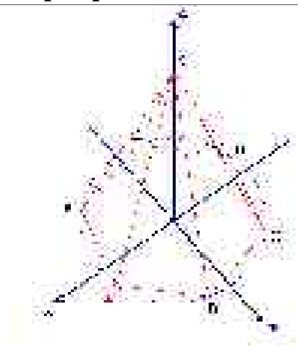
Notons que A’ est superposé à A et n’existe que si C appartient à un demi-plan délimité par (AB) ou plus précisément lorsque les trois points A, B et C sont disposés dans le sens direct.

On a enfin tracé le triangle A’BC qui est superposé au triangle ABC. Néanmoins le triangle construit A’BC disparaît lorsque ABC devient indirect.

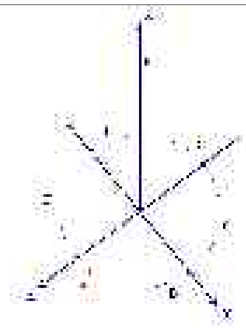
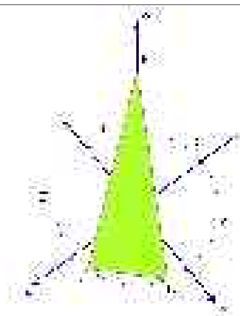
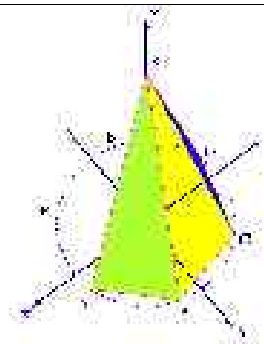
On cache enfin le point A’ pour qu’il nous reste le triangle ABC quand celui-ci est direct et seulement les points A, B et C quand le triangle est indirect.

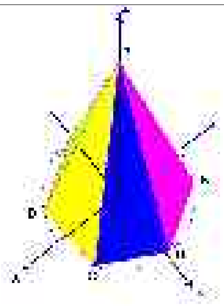
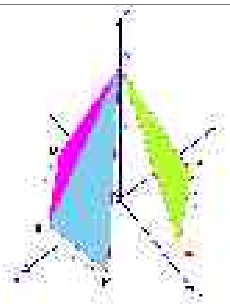
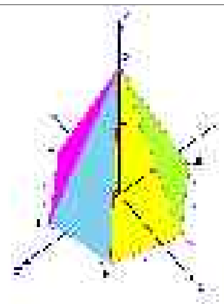
Cette construction est ensuite enregistrée dans une macro construction nommée « **tricond.mac** » ayant 3 points A, B, C et le nombre 90 comme objets initiaux et le triangle A’BC comme objet final, c’est à dire un triangle visible si et seulement si ABC est de sens direct

3.3. Application à la construction d’une pyramide en perspective militaire

On construit pour cela un polygone régulier ABCDEF dans un cercle du plan horizontal d’une perspective militaire. On choisit le sommet S sur l’axe vertical. On peut visualiser cette pyramide à droite en traçant les arêtes issues de S. On peut ensuite cacher l’hexagone régulier et les arêtes ou même les effacer pour applique la macro « **tricond.mac** » à chacun des triangles composant les faces non horizontales de la pyramide (on aura préalablement édité le nombre 90 qui est un objet initial de notre macro).	 ***pyramidetournantepmA.fig***

Voici quelques étapes de la construction des faces conditionnellement visibles. Notons que c’est en tirant sur le point A qu’on fait tourner la pyramide autour de son axe vertical OZ quand cela sera nécessaire (Utiliser le fichier *pyramidetournantepmB.fig*).

		
Constructions de la base de la pyramide et de son sommet.	Application de la macro « tricond.mac » aux trois points S, A et B dans cet ordre.	Même chose pour SBC et SCD qui sont aussi des faces visibles.

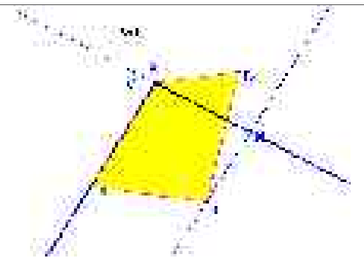
		
On fait tourner le point A pour mettre les faces SCD et SDE en position pour être vues. On leur applique la même macro pour les rendre effectivement visibles.	On continue à faire tourner le point A pour mettre face à nous le dernier triangle qui devrait être vu, c’est à dire, SFA.	On applique la macro à ce triangle pour le rendre visible. Notons que les deux triangles remplies en jaune l’ont été avec l’option de remplissage « transparent ».

Note : cette macro permet donc de gérer les faces visibles d’un polyèdre à faces triangulaires. Une macro analogue peut être créée qui permette de gérer les faces visibles d’un polyèdre à faces quadrilatérales.

3.4. Gestion conditionnelle des quadrilatères convexes

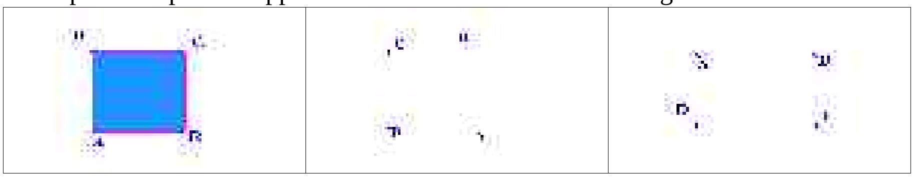
On note A, B C et D les sommets d'une face visible quadrilatérale d'un polyèdre dans une représentation en perspective, A, B C et D étant pris dans le sens trigonométrique ou sens direct. Lorsque le polyèdre change de position et que la face qui était visible passe « derrière » cette face visible disparaît. Ceci arrive quand les trois points A, B C et D se retrouvent dans une orientation contraire à l'orientation d'origine, c'est à dire comme la face reste convexe, quand le trangle ABC se retrouve dans l'orientation indirecte. Le problème que nous allons traiter est le suivant : quelles constructions réaliser lorsque les quatre points A, B C et D étant donnés dans le sens direct, le quadrilatère ABCD apparaisse et que le quadrilatère disparaisse lorsque les quatre points A, B C et D se retrouvent dans l'orientation contraire.

C'est toujours la méthode de Geneviève Tulloue qui est exploitée et permet de créer la macro équivalente de « tricond.mac » que nous noterons « quadcon.mac ». Cela est obtenu à partir de la figure Cabri ci-contre.



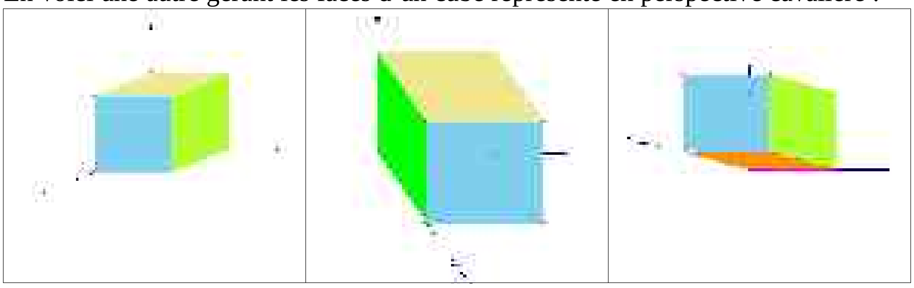
QuadrilatèreTulloue1.fig

Voici par exemple une application de cette macro à un rectangle



QuadrilatèreTulloue2.fig

En voici une autre gérant les faces d'un cube représenté en perspective cavalière :

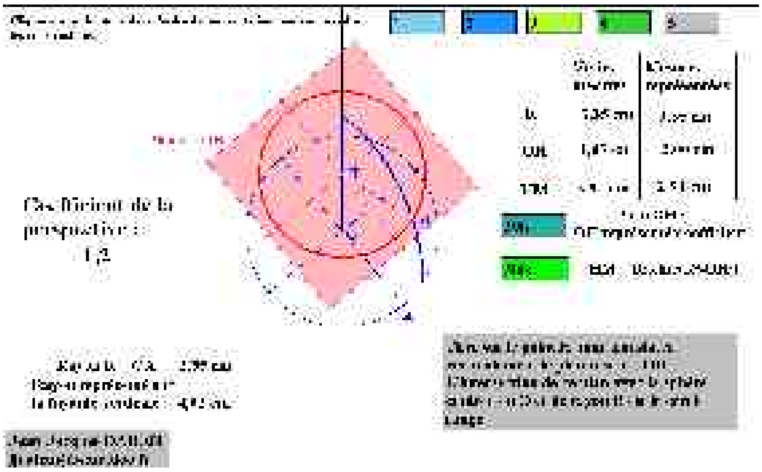


QuadrilatèreTulloue3.fig

3. REPRÉSENTATIONS DE LA DEMI-SPHÈRE (en perspective militaire)

3.1. Avec des connaissances de géométrie

On construit le cercle rouge, intersection du plan rose z = OH avec notre demi-sphère de cercle équatorial bleu, en calculant son rayon HM comme indiqué dans le fichier suivant ; la procédure apparaît quand on clique successivement sur les boutons numérotés :



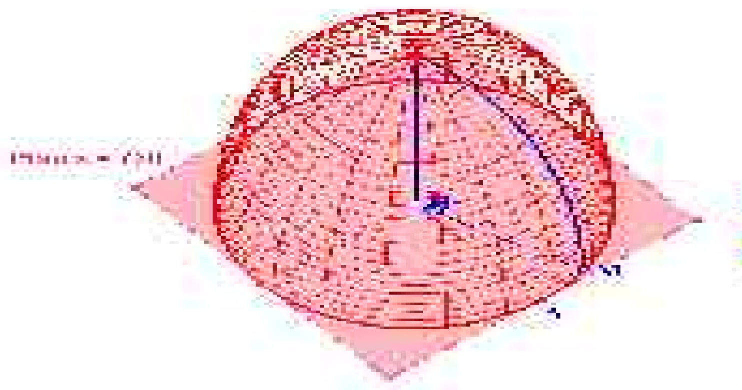
sphèrepm.fig

Le lieu de M lorsque H varie donne un demi-méridien tracé en bleu

Une représentation de la sphère peut être obtenue comme ci-dessous en construisant deux lieux :

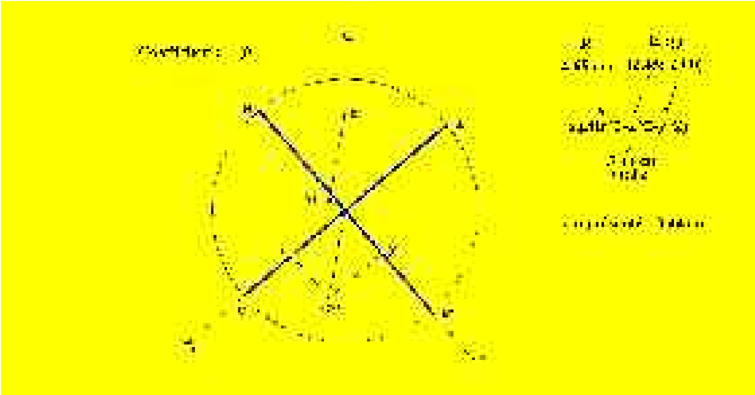
Celui des cercles rouges de rayons HM qui donne une famille de parallèles.

Celui des demi-méridiens quand M varie.



sphèrepmA.fig

3.2. Avec des connaissances d'analyses (fonctions de deux variables)



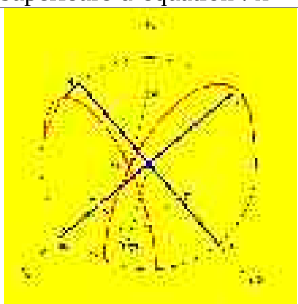
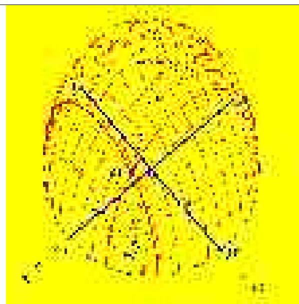
sphèrepmsurfsection.fig

On a créé le cercle équatorial de centre O et passant par A' dans le plan horizontal de la perspective (rayon R) puis un point de coordonnées x et y qui peut parcourir le carré ayant comme médianes [AA'] et [BB'] (x est créé sur le segment [AA'] et y est créé sur le segment [BB']. On a fait afficher R et les coordonnées x et y.

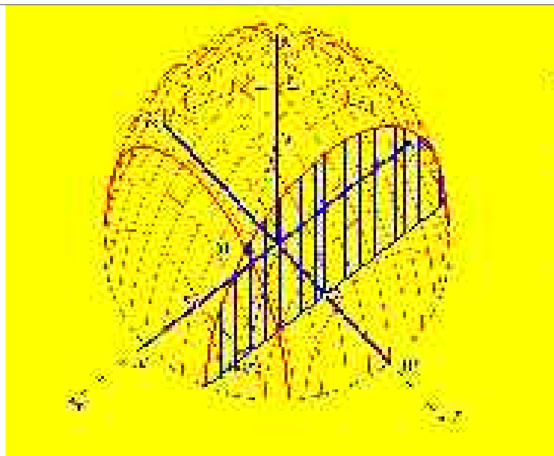
On a édité la fonction de 3 variables définie par $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

On applique cette expression au triplet précédent (r ; x ; y) qui donne la valeur de z cherchée. On multiplie ensuite ce nombre par le coefficient de la perspective pour obtenir la valeur de z qu'il faudra reporter sur l'axe représentant l'axe vertical de l'espace (ici cela ne change rien car le coefficient vaut 1).

Une translation permet par exemple de construire le point M générique de la demi sphère supérieure d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

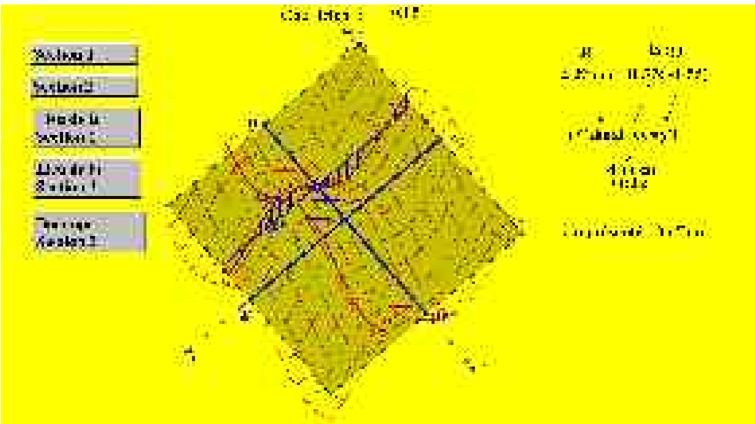
	
Les sections de cette sphère par des plans parallèles à yOz et xOz passant par M, sont respectivement obtenues en demandant : Le lieu $\boldsymbol{L_1}$ de M quand y varie. Le lieu $\boldsymbol{L_2}$ de M quand x varie	L'ensemble dess sections de cette sphère par des plans parallèles à yOz et xOz passant par M, sont respectivement obtenues en demandant : Le lieu de $\boldsymbol{L_1}$ quand x varie. Le lieu de $\boldsymbol{L_2}$ quand y varie

Note : les deux derniers lieux ont été demandés après avoir réglé le nombre d'objets d'un lieu à 15 dans le menu « Options » puis « Préférences » puis l'onglet « Lieux ».

Si on revient à un nombre d'objets égal à 50, si on crée le segment qui joint le point (x ;y) au point M et si on demande le lieu de ce segment lorsque x varie, on obtient la visualisation de la sphère avec la représentation de la découpe suivant le plan parallèle à xOy passant par M	 *sphèrepmsurfsection.fig*

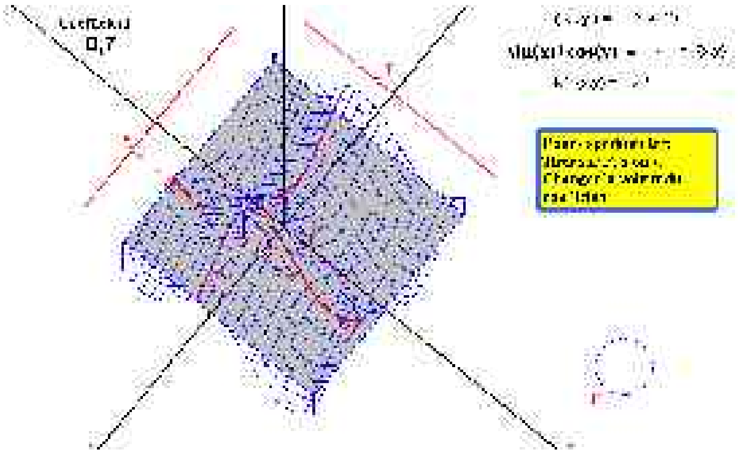
3.3. Utilisation de ce fichier comme imagiciel représentant les surfaces

Ici on a simplement modifié la fonction et le coefficient de la perspective pour obtenir une fonction réellement définie sur le carrgris du plan xOy



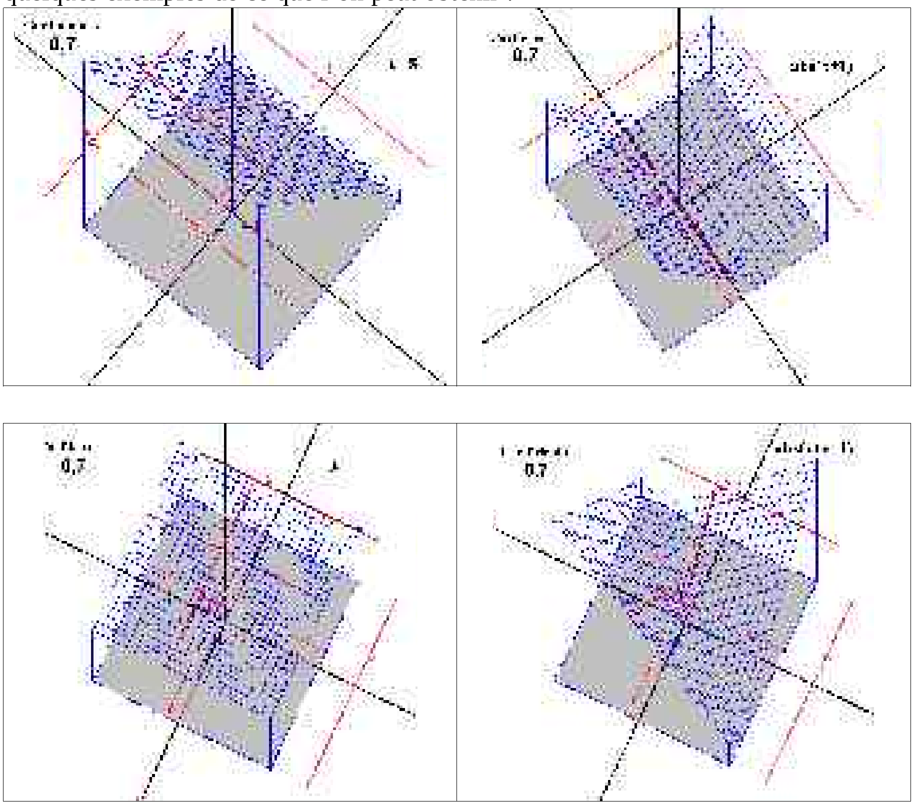
sphèrepmsurfsectionA.fig

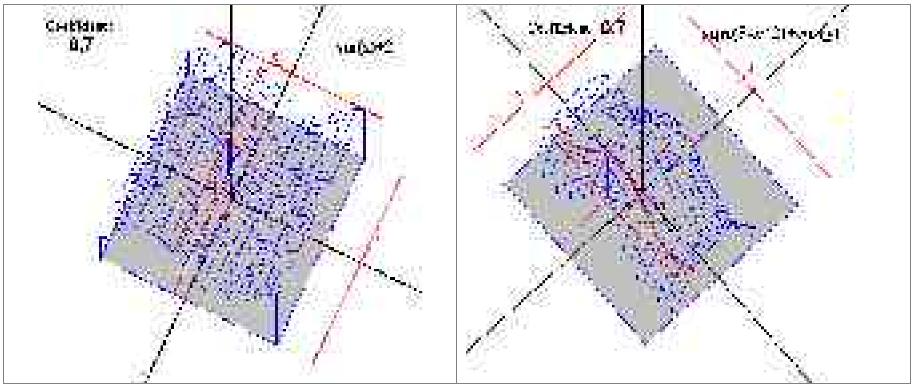
Voici ci-dessous un fichier spécialement créé pour être utilisé en tant qu'imagiciel sans troisième variable parasite :

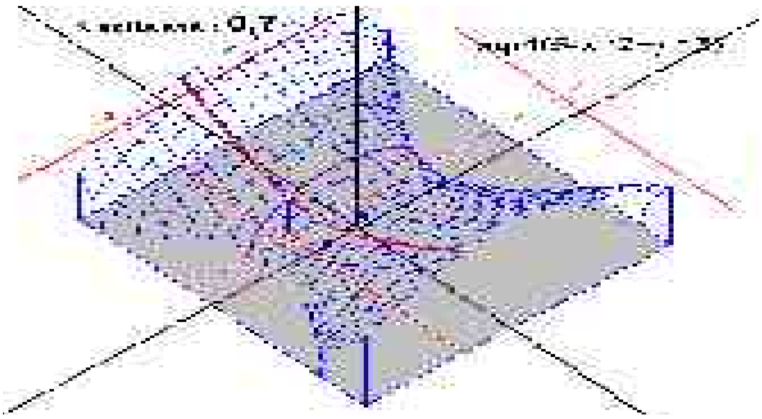


Csurfacepm1.fig

Pour obtenir d'autres représentations, il suffira simplement de changer dans le fichier précédent la fonction éditée et éventuellement le coefficient. Voici ci-dessous quelques exemples de ce que l'on peut obtenir :







BIBLIOGRAPHIE

Sites internets supplémentaires fortement recommandés

Site N°1 de Geneviève Tulloue : http://gtulloue.free.fr/Cabri3D/

Site N°2 de Geneviève Tulloue

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/

USING THE NEW TOOLS OF CABRI II PLUS TO TEACH FUNCTIONS

Conférence donnée à Nashville (congrès T3)

http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/nashville/nashville.htm

Livres ou brochures

Géométrie avec cabri, CRDP de Grenoble, P. Clarou C. Laborde, B. Capponi

Première S Math   Éditions Belin 1999 dirigé par J.P. Bouvier avec J.J. Dahan

Seconde Math   Éditions Belin 2000 dirigé par J.P. Bouvier avec J.J. Dahan

Enseigner et pratiquer les Mathématiques avec Cabri Brochure IREM Toulouse J.J. Dahan

Introduction à la Géométrie avec la TI-92, Éditions Ellipses, J.J. Dahan